直交格子系における 血流解析

松永 奈美、劉 浩、姫野 龍太郎
理化学研究所情報基盤研究部
情報環境室

理研シンポジウム　生体力学シミュレーション
6月5日（火）　鈴木梅太郎ホール

1. 今回の研究の目的

- ボクセルデータを直接用いて、搾取部を有する２次元血管モデル内の血流動態の解析を行いたい。
- 特に、ボクセルの特徴を生かしてそのまま直交座標系で計算をしたい。

2. 対象とする基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} St = F_u - \frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} St = F_v - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$D := \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ただし, (u,v) は速度、p は圧力、St はストローハル数、F_u, F_v は流速項で、次のように定義する。

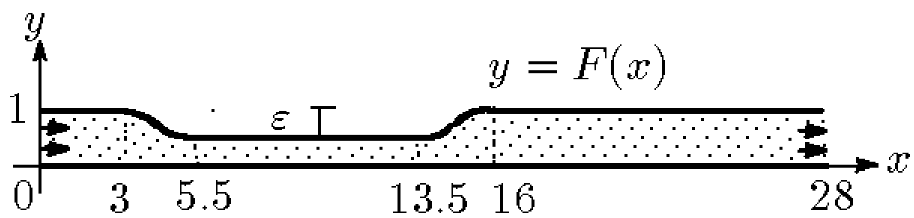
$$F_u := -u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$F_v := -u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

ここで、Re はレイノルズ数を表す。

3. 数値例

ここでは次のような管内の流れを取り扱う。



$$
\begin{array}{ll}
F(x) = 1 & (0 < x < 3) \\
F(x) = 1 - 0.5\varepsilon \left\{1 + \tanh \alpha (x - x_a)\right\} & (3 \leq x \leq 5.5) \\
F(x) = 1 - \varepsilon & (5.5 < x < 13.5) \\
F(x) = 1 - 0.5\varepsilon \left\{1 - \tanh \alpha (x - x_b)\right\} & (13.5 \leq x \leq 16) \\
F(x) = 1 & (16 < x < 28)
\end{array}
$$

ただし、ε, α はパラメータ、x_a, x_b は定数で、

$$0.1 \leq \varepsilon \leq 0.6, \quad \alpha = 4.14$$

$$x_a = 4.25, \qquad x_b = 14.75$$

を満たす。

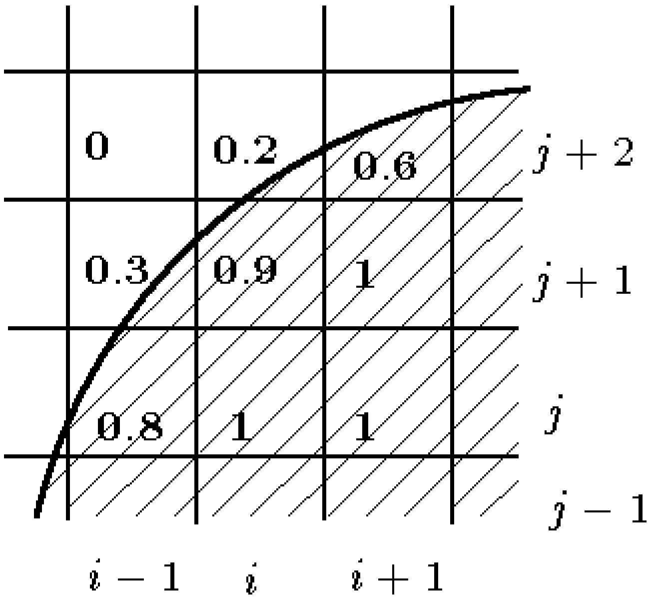
4. ボクセル情報からの領域の認識

ボクセル情報:0～1の値

1つのボクセルに占める流体占有率

VOF関数:F

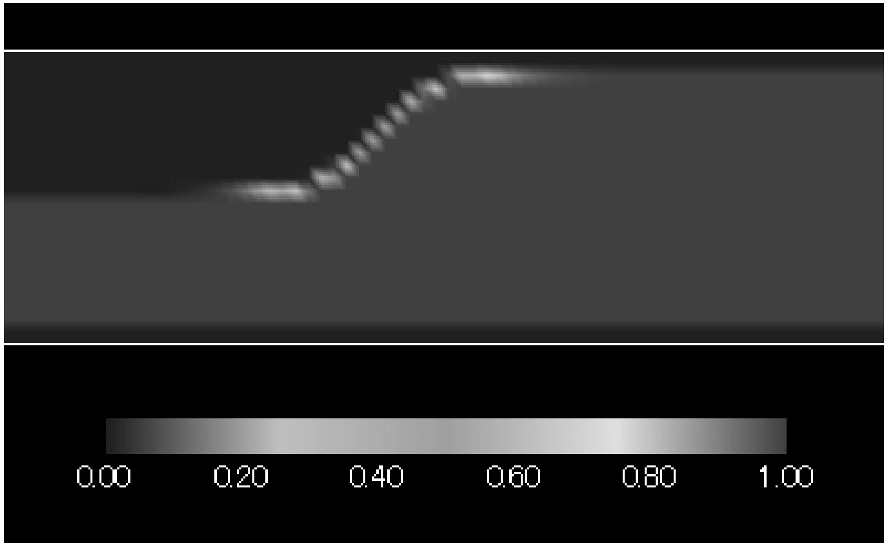
(Volume of Fluid)



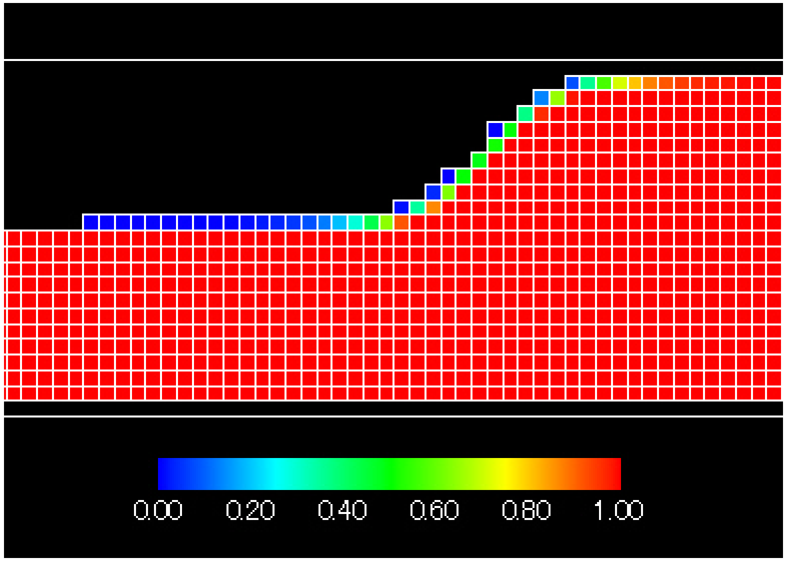
流体の境界面:

0<F<1の関数値をもつ領域内に存在する

･ボクセル情報（イメージ図）



(a) 0～1での値の表示

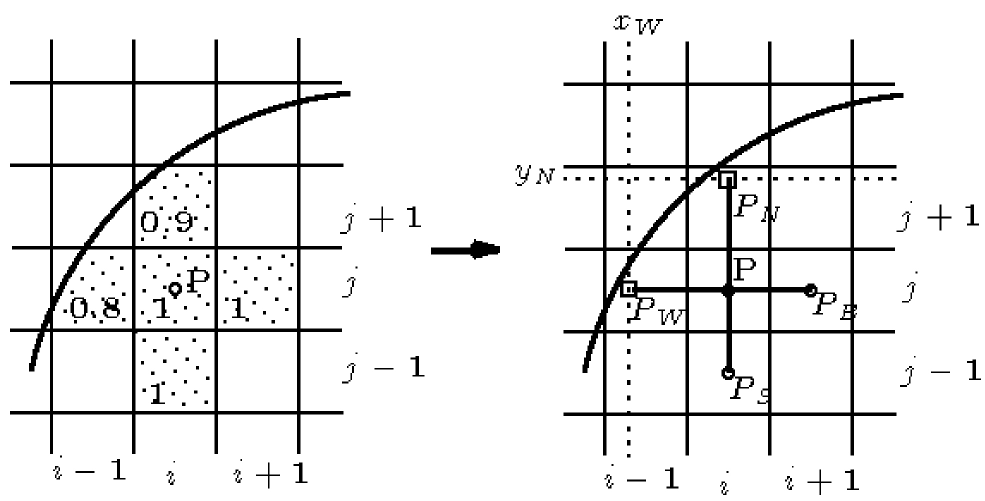


(b) ボクセル情報

･格子点の配置

- 基本的にはボクセルの中心に格子点を配置
- 境界に隣接している点

$$h_W = \begin{cases} h & (F(P_W)=1) \\ (0.5+F(P_E))h & (0 \le F(P_W) < 1) \end{cases}$$



ただし、

P_W :点Pに隣接した点、

h_E: 点Pから点P_Eまでの距離

·格子点の座標

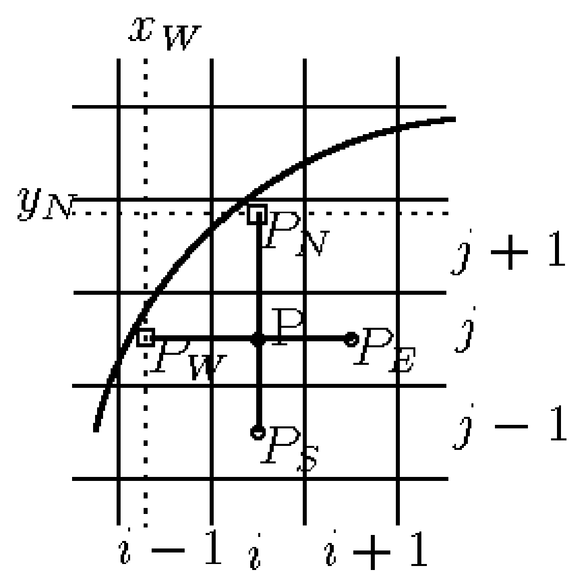
点Pに隣接している4点の座標:

$$x_E = ih + h_E, \quad y_E = jk \qquad (F(P_E) \neq 1)$$

$$x_W = ih - h_W, \quad y_W = jk \qquad (F(P_W) \neq 1)$$

$$x_S = ih, \quad y_S = jk - k_S \qquad (F(P_S) \neq 1)$$

$$x_N = ih, \quad y_N = jk + k_N \qquad (F(P_N) \neq 1)$$



ただし、h, k はそれぞれ x 軸方向、y 軸方向の格子幅。

5．数値計算法

- 未知数はすべて格子点および境界点上に配置
- 時間項は前進Euler法を適用
- 仮速度、圧力を求めて、次時間ステップの速度を求める
- スタガード法的な計算方法を用いる

例：$u_{i+\frac{1}{2},j}$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{i+\frac{1}{2},j}$ や $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{i+\frac{1}{2},j}$ の値を定義点から求める。

- 境界に隣接した点では、微分項に対してNPLCを使用。

・近傍点局所選点法(中野ら(1995))

(NPLC: Neighboring Point Local Collocation Method)

f : 離散化に要する物理量とし、2次関数で近似する。

$$f - f_0 = a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy$$

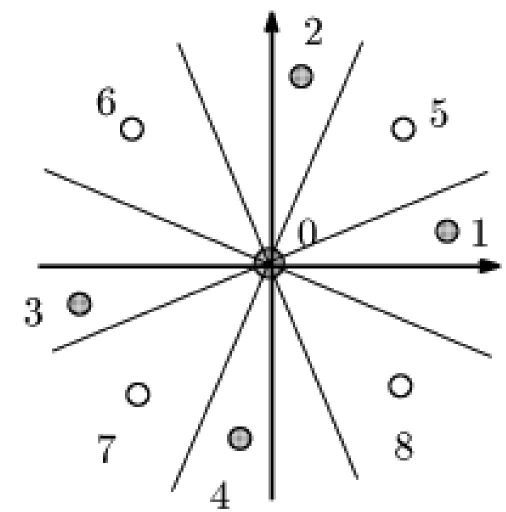
ただし、x, y は 点Oからの相対座標。

このとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_1 + 2a_3 + a_5 y、\quad \frac{\partial f}{\partial y} = a_2 + 2a_4 + a_5 x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a_3、\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a_4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a_5$$

となる。



Spatial points relation for NPLC

6. 境界条件の取り扱い

単位法線ベクトルを $n = (n_x, n_y)$ とする。ここで、圧力 p に対しては、例えば、固定壁上ではノイマン条件が与えられる。

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y = 0$$

このとき、元の基礎方程式より

$$\frac{\partial u}{\partial t} St \cdot n_x = F_u n_x - \frac{\partial p}{\partial x} n_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} St \cdot n_y = F_v n_y - \frac{\partial p}{\partial y} n_y$$

より、この3式を使って $\partial p / \partial x$ について解けば、それを利用して x 軸方向での圧力の境界の値を得ることができる。

7. 計算結果

$$\mathrm{Re} = 750, \varepsilon = 0.5, h = k = 0.05$$

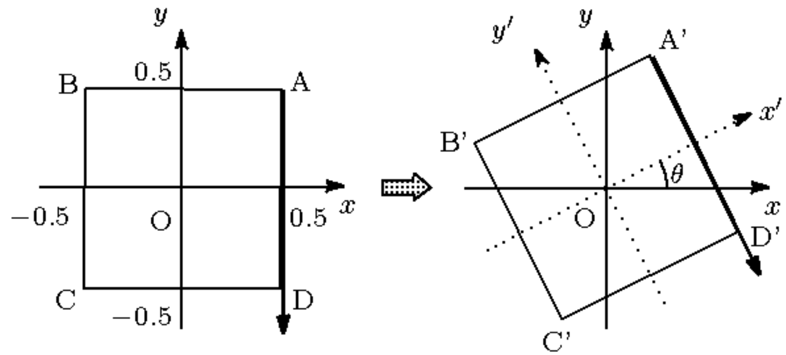
$$\Delta t = 0.002,\ 5000\text{ステップ}$$

(すなわち、流入条件の1周期分)で計算を行った。
また、圧力のポアソン方程式を解く際には通常のSOR法を採用。

数値例

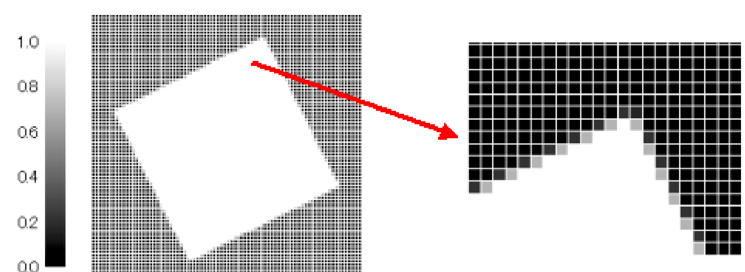
- Cavity問題による数値検証

□ABCDでの境界条件：
　線分AD上　(u,v)=(0,-1)
　それ以外の線分上　(u,v)=(0,0)

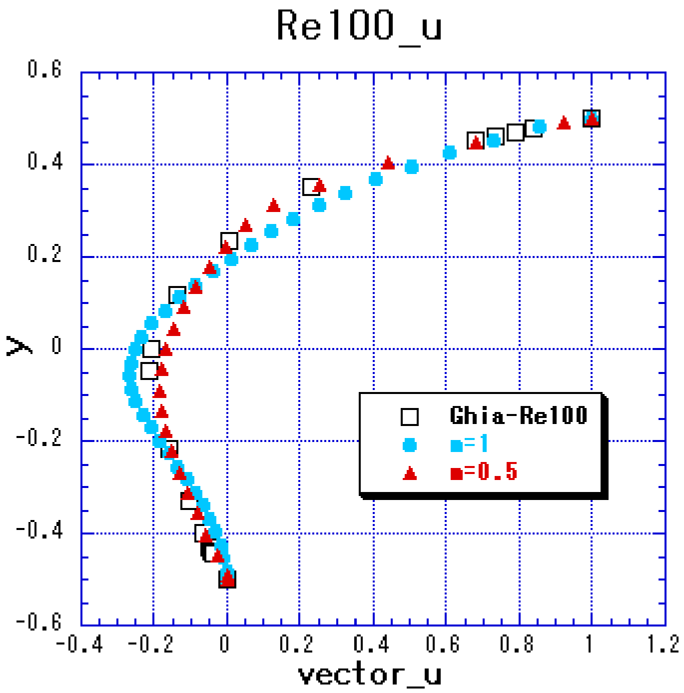


ここで、　$m=\tan\theta$　とする。

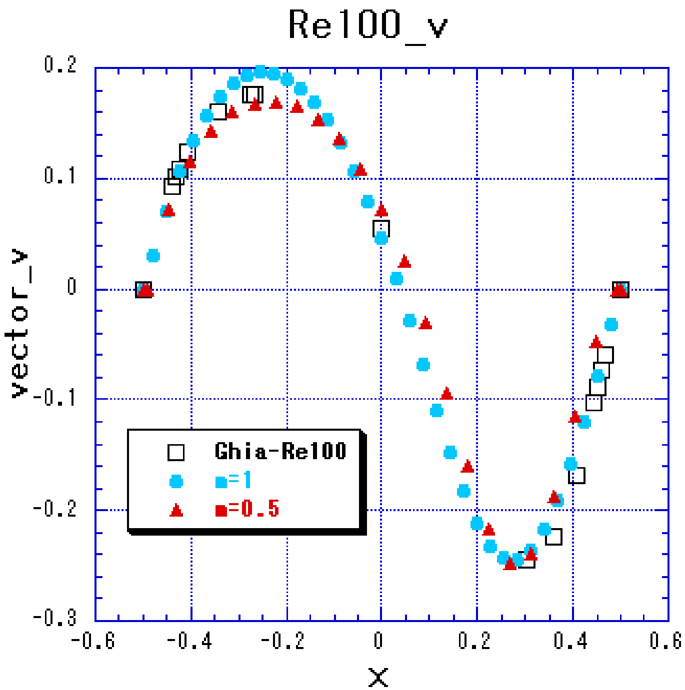
右図のように、既に各ボクセル上での値が与えられているものとする。



Case1. Re=100, h=k=0.02, Δt=0.005, timestep=10000
(a) m=0.5 (b) m=1

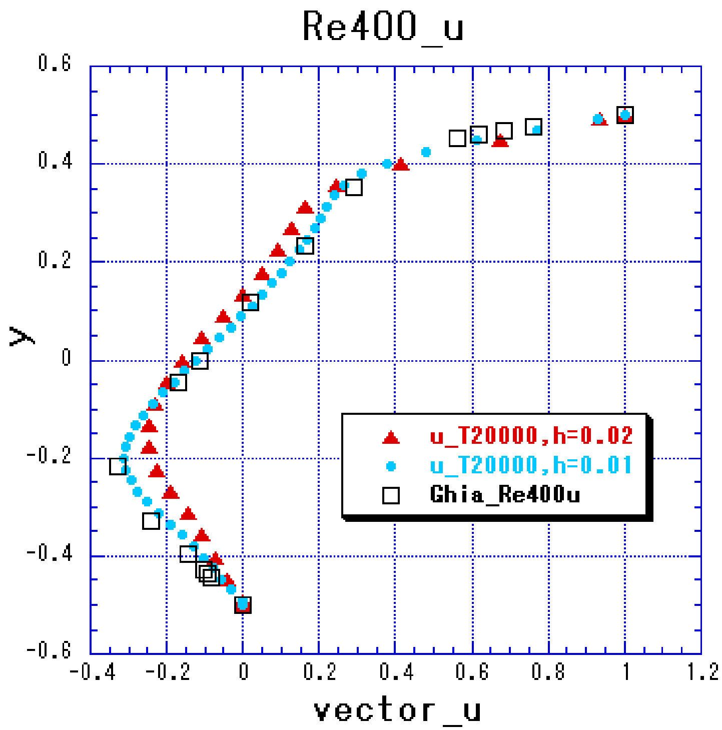


u-velocity in Case1

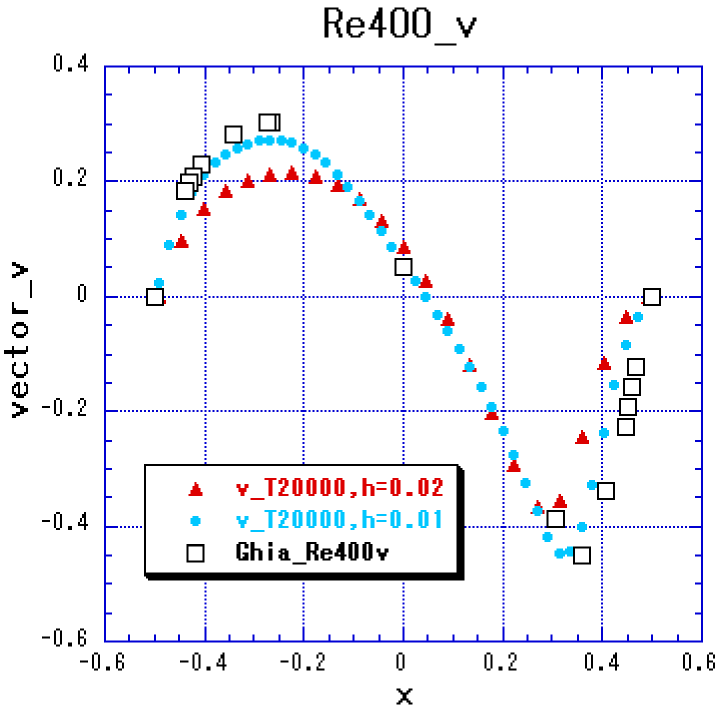


v-velocity in Case1

Case2. Re=400, m=0.5, timestep=20000
(a) h=k=0.02, Δt=0.005 (b) h=k=0.01, Δt=0.0025



u-velocity in Case2



v-velocity in Case2

・ m=0.5に対しては、Re=100, 400のいずれの場合も格子幅を適当に取ると、安定に計算できることが分かった。

・　傾きをの値を変えた時でも、レイノルズ数が低い場合は有効な結果が得られている。

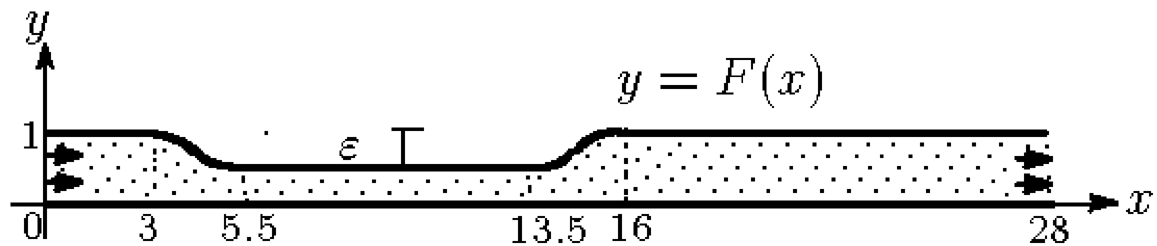
結言

- 本研究では、ボクセル情報の数値データを直接用いて、VOF関数から領域を認識させ、直交座標系の特徴を生かして、対象領域内の2次元非圧縮流れの解析を行った結果、今回提案した方法の有効性を検証できた。

- 今後は、高レイノルズ数流れに対しても同様の安定性が得られるかどうかを検討しながら、MRI画像から得られた血管のボクセルデータを用いて、血流解析を試みる予定である。

その他の例

・対象領域



$$
\begin{aligned}
F(x) &= 1 && (0 < x < 3)\\
F(x) &= 1 - 0.5\varepsilon\left\{1 + \tanh\alpha(x - x_a)\right\} && (3 \le x \le 5.5)\\
F(x) &= 1 - \varepsilon && (5.5 < x < 13.5)\\
F(x) &= 1 - 0.5\varepsilon\left\{1 - \tanh\alpha(x - x_b)\right\} && (13.5 \le x \le 16)\\
F(x) &= 1 && (16 < x < 28)
\end{aligned}
$$

$$0.1 \le \varepsilon \le 0.6$$

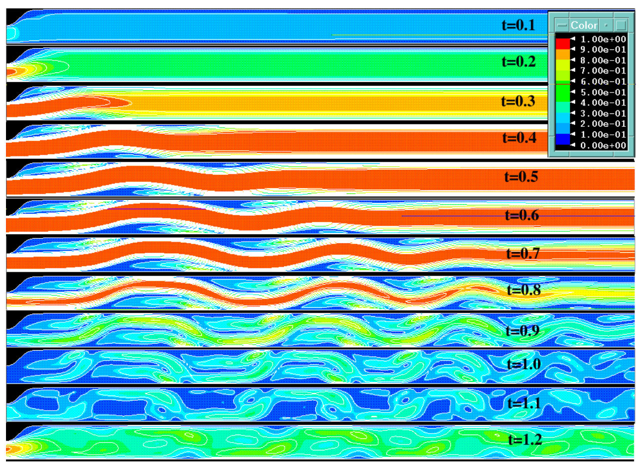
$$\alpha = 4.14$$

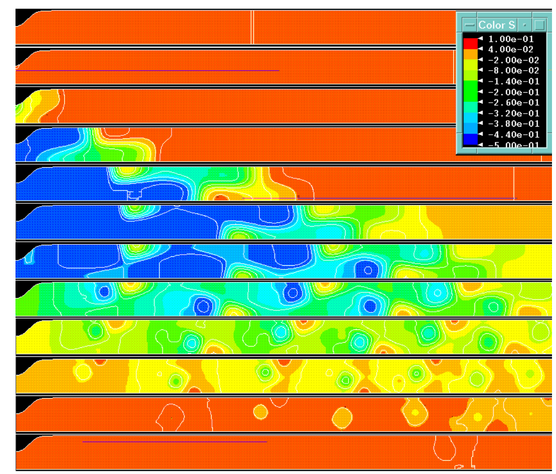
$$x_a = (3.0 + 5.5)/2 = 4.25$$

$$x_b = (13.5 + 16.0)/2 = 14.75$$

・ボクセルデータ

・劉先生らの結果 (Re＝750, *St*＝0.024)





■ Hirtらによる境界の認識方法(1979)

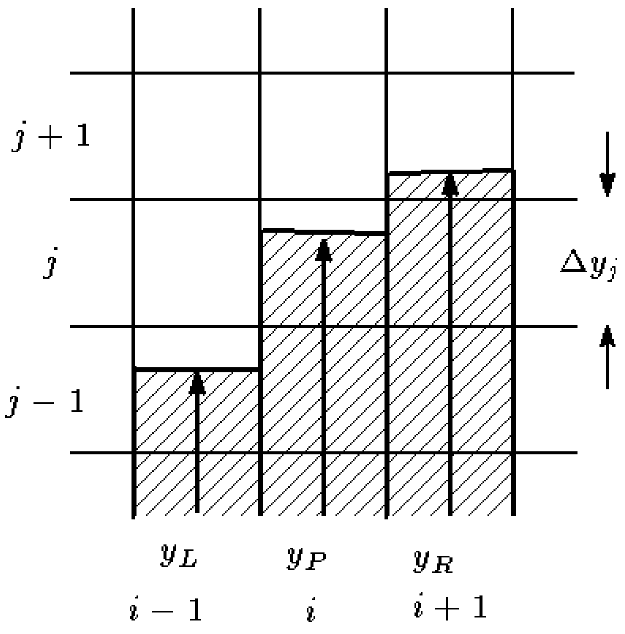
$$y_P = \cdots + F_{i,j-1}\Delta y_{j-1} + F_{i,j}\Delta y_j + F_{i,j+1}\Delta y_{j+1} + \cdots$$

ただし、

$\Delta y_j \,(j = 1, 2, \cdots j-1)$:

　　y軸方向の各刻み幅

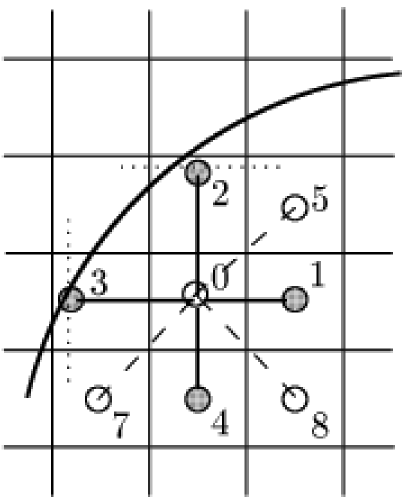
$F_{i,j}$: (i, j)での関数値



点0に隣接する座標方向の格子点4点（点１～４）及び対角方向の格子点1点（5、7、8より選択）から得られる5×5Matrixから得られる未知係数を平均化する。

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 \\ x_4 & y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4 \\ x_i & y_i & x_i^2 & y_i^2 & x_iy_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - f_0 \\ f_2 - f_0 \\ f_3 - f_0 \\ f_4 - f_0 \\ f_i - f_0 \end{pmatrix}$$

($i = 5, \ldots, 8$、かつ、x_i、y_i は点 0 からの相対座標)



Treatment of grid point near surface

・境界条件

1. 境界は固定する。

2. **x=0**における速度の流入条件：

$$u(0,y,t)=0.5(1-\cos 2\pi t)$$

$$v(0,y,t)=0$$

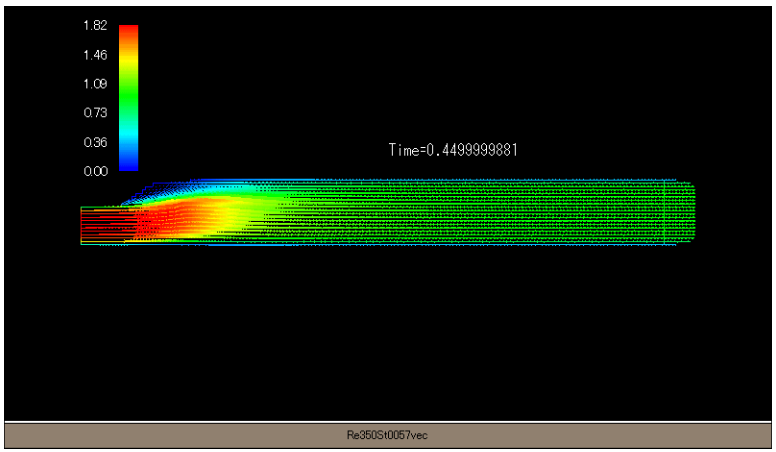
3. **x=28**における速度の流出条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

4. その他の境界は、**no-slip**条件を与える。

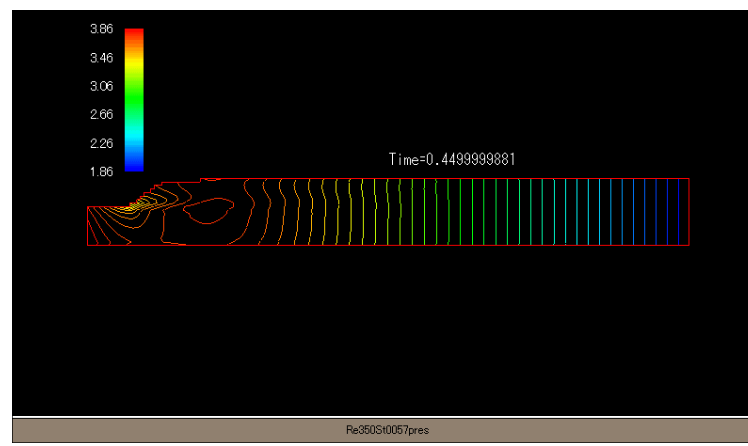
また、圧力に関しては、それぞれの境界において、流入、流出条件 および **no-slip**条件を与える。

例: Re=300, St=0057,h=k=0.05, ε =0.4



ベクトル図

圧力分布

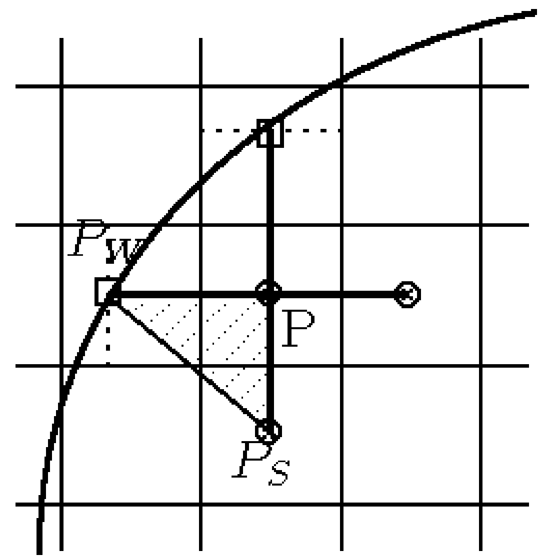


■ ノイマン条件の取り込み方

境界点と内点2点を選び、その領域内における物理量を2次関数にて近似する。

$$p(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y$$

ただし、c_1、c_2、c_3 は未知係数、x, y は点Pからの相対座標を表す。



$$n = (n_1, n_2)$$:単位法線ベクトル

このとき、

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_1 + \frac{\partial p}{\partial y} n_2$$

であるから、境界点と内点２点から得られる関係式から未知係数を求めればよい。