

直交格子系における血流解析

松永 奈美^{*}, 劉 浩[†], 姫野 龍太郎[‡]

^{*} 理化学研究所 情報環境室
埼玉県和光市広沢 2-1
matunaga@postman.riken.go.jp

[†] 理化学研究所 情報環境室
埼玉県和光市広沢 2-1
hliu@postman.riken.go.jp

[‡] 理化学研究所 情報環境室
埼玉県和光市広沢 2-1
himeno@postman.riken.go.jp

要旨 ボクセルデータを直接用いて狭窄部を有する 2 次元血管モデル内の血流動態の解析を行うことを考える．ここでは、ボクセル情報からダイレクトに直交座標系へ変換して計算する方法を用い、その方法の妥当性について検証する．

1. 緒言

ここでは、0 から 1 の実数値で与えられるボクセル情報を用いて、2 次元血管内の流れを解析することを考える．2 次元非圧縮性流体解析を行う場合は、一般には、流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式と連続の式を対象とするが、血流のように拍動を伴う場合は、具体的には次のような方程式を解くことになる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} St = F_u - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} St = F_v - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$D := \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

ただし、 (u, v) は速度、 p は圧力、 St はストローハル数、 F_u, F_v は流速項を表し、

$$F_u := -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.4)$$

$$F_v := -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.5)$$

で定義されるものとする．また、 Re はレイノルズ数を表す．

任意領域に対して直交座標系を用いる場合は、境界付近のスキームの取り扱いおよび境界条件の取り込みが非常に難しい．特に不等分割点を含むとき、境界付近の点での左右または上下の幅の割合に大きく差が出る場合は、直交座標系を使ってそのまま計算をする

と振動を起こしたり計算自体が破綻しやすいという問題がある。そのため、これまでも境界の近くでの離散化および境界条件の取り込み方に対していろいろな手法が提案されている。しかしながら、今回はボクセル情報をそのまま生かしてそのままダイレクトに直交座標系へ変換して計算する方法を提案し、その妥当性について検証してみたい。

2. 数値例

ここでは、次のような管内の流れ [1] を取り扱うことを考える。

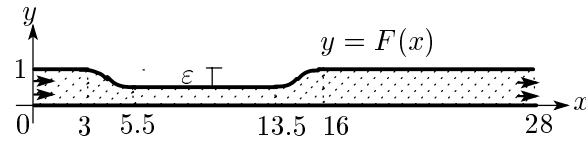


図 1c

ただし、形状は図 1 での斜線部分で表されるものとし、その上部の形状は下記の関数 $F(x)$ で表されるものとする。

$$\begin{aligned} F(x) &= 1 & (0 < x < 3) \\ F(x) &= 1 - 0.5\varepsilon \{1 + \tanh \alpha(x - x_a)\} & (3 \leq x \leq 5.5) \\ F(x) &= 1 - \varepsilon & (5.5 < x < 13.5) \\ F(x) &= 1 - 0.5\varepsilon \{1 - \tanh \alpha(x - x_b)\} & (13.5 \leq x \leq 16) \\ F(x) &= 1 & (16 < x < 28) \end{aligned}$$

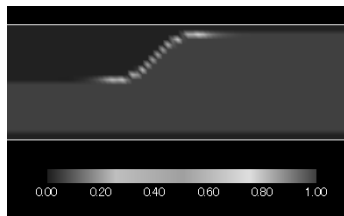
ここで、 ε 、 α はパラメータで、それぞれ $0.1 \leq \varepsilon \leq 0.6$ 、 $\alpha = 4.14$ を満たすものとし、

$$x_a = (3.0 + 5.5)/2 = 4.25, \quad x_b = (13.5 + 16.0)/2 = 14.75$$

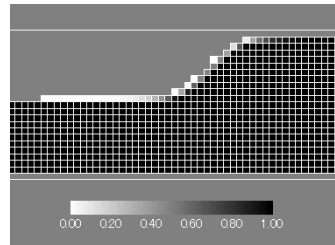
と定める。境界条件は、流入条件を $u = 0.5(1 - \cos(2\pi t))$ 、 $v = 0$ 、 $\partial p/\partial x = 0$ 、流出条件を $\partial u/\partial x = 0$ 、 $\partial v/\partial x = 0$ 、 $p = 0$ とし、その他の境界は no-slip 条件とする。

3. ボクセル情報からの領域認識

通常、MRI 画像を取り込んだ場合、そのデータは 1 つのボクセルに対して 0 から 1 の実数値として与えられる (図 2 はイメージ図)。



(a)



(b)

図 2: (a) 0 ~ 1 での値表示 と (b) ボクセル情報

また、この値は、1 ならば流体、0 ならば固体、それ以外の値 t ($0 < t < 1$) であるときはそのボクセル内に境界が存在する というように、1 つのボクセルに占める流体占有率として

解釈されることが多く，このボクセル上の関数は，F 関数または VOF (Volume Of Fluid) 関数と呼ばれることが多い．この VOF 関数を基にしてその境界面やその勾配を決める方法にはいくつか提案されているが ([2], [3] を参照)，今回は 5 つのボクセルから左右上下の境界面およびその勾配を計算することとする．ただし，ここでは境界面の決め方のみを述べる．

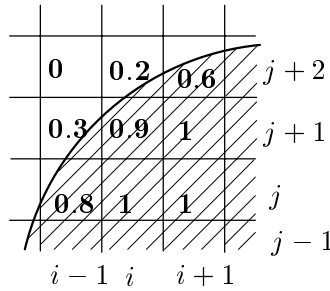


図 3: VOF 関数の値と境界の関係

まず，各ボクセルの中心に点を置き，領域全体に格子点を張り巡らすこととする．また，その格子点の x 軸方向， y 軸方向の幅をそれぞれ h, k で表すとき，格子点 $P(x_i, y_j) = (ih, jk)$ (ただし， i, j は整数) における F 関数が $F(x_i, y_j) = 1$ を満たすならば，点 P は “内点” であると定義する．さらに，その内点 P の中でも特に次の条件を満たすとき，“境界に隣接した内点” と呼ぶこととする．

$$F(x_{i-1}, y_j)F(x_{i+1}, y_j)F(x_i, y_{j-1})F(x_i, y_{j+1}) \neq 1$$

次に，内点 P に隣接した 4 点と点 P から各点までの距離をそれぞれ P_E, P_W, P_S, P_N および h_E, h_W, k_S, k_N で表すこととする (図 4 を参照) ．

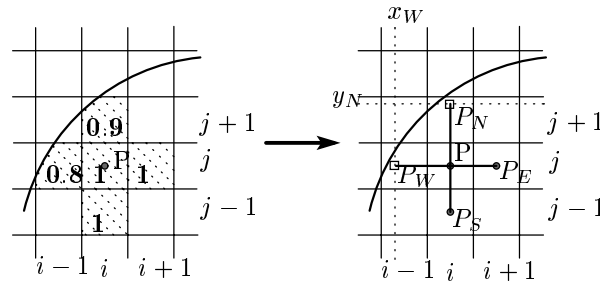


図 4: ボクセル情報から直交座標系への変換

ここで，隣り合う内点どうしの距離と境界付近の F 関数の有限体積的な解釈を考慮して，点 P からのそれぞれの長さを次のように定義する．

$$h_E = \begin{cases} h & (F(P_E) = 1) \\ (0.5 + F(P_E))h & (0 \leq F(P_E) < 1) \end{cases} \quad (3.1)$$

このとき， $0.5h \leq h_E < 1.5h$ であることに注意する．また， h_W, k_S, k_N に対しても同様に定義する．さらに，境界点の x 座標および y 座標は次のように計算するものとする．

$$\begin{aligned} x_E &= ih + h_E, & y_E &= jk & (F(P_E) \neq 1) \\ x_W &= ih - h_W, & y_W &= jk & (F(P_W) \neq 1) \\ x_S &= ih, & y_S &= jk - k_S & (F(P_S) \neq 1) \\ x_N &= ih, & y_N &= jk + k_N & (F(P_N) \neq 1) \end{aligned}$$

従って、点Pが内点ならばボクセルの中心に格子点が配置され、そうでない場合は上記の方法により境界点が定められる。

4. 数値計算法

次に計算方法を示す。それぞれの未知数 u, v, p は前節で述べた格子点上または境界点上で定義されるものとする。

式 (1.1), (1.2) を前進 Euler 法により時間積分すると、

$$u^* = u^n + \frac{\Delta t}{St} \left(F_u^n - \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) \quad (4.1)$$

$$v^* = v^n + \frac{\Delta t}{St} \left(F_v^n - \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) \quad (4.2)$$

を得る。ただし、上付き添字 n は時間ステップ数、 u^*, v^*, p^* はそれぞれ n 時間段階での仮の速度場、仮の圧力を表すものとし、 Δt は時間刻み幅を表す。次に、 $n+1$ 時間ステップ目において連続の式を厳密に満たす速度場を u^{n+1}, v^{n+1} とするとき、次式を満たすような圧力 p^{n+1} を求めることを考える。

$$u^{n+1} - u^* = \frac{\Delta t}{St} \left(-\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) \quad (4.3)$$

$$v^{n+1} - v^* = \frac{\Delta t}{St} \left(-\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) \quad (4.4)$$

ここで、 $n+1$ 時間ステップ目において速度が連続の式: $D^{n+1} = 0$ を満たすという条件から、次式を得ることができる。

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{St}{\Delta t} D_{i,j}^* + \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} \quad (4.5)$$

従って、上式から $n+1$ 時間ステップ目の圧力 p^{n+1} を得ることができるので、式 (1.1), (1.2) に戻って速度 u, v を計算すればよい。

さて、境界に隣接した点での微分項を計算する場合、離散式においては仮想点が必要となってしまうが、ここでは、仮想点を置く代わりに近傍点局所選点法 [4] (Neighboring Point Local Collocation Method: 以下、NPLC と略す) を使うこととする。

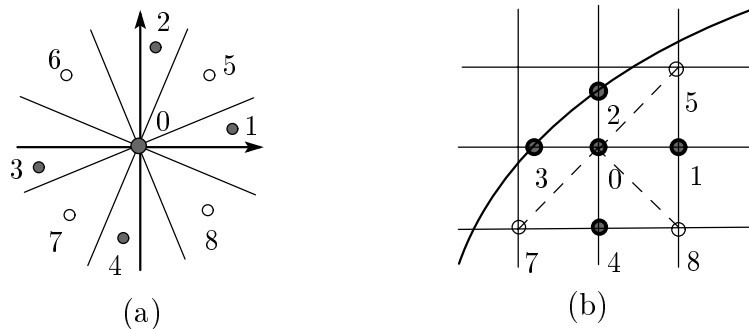


図5: NPLCで扱われる点と空間の配置図

まず、図5のように点0を中心として各々の方向に番号をつける。離散化に必要な物理量を f とするとき、境界に隣接した内点の周りの f の分布を、位置に関する2次関数に近似する。

$$f(x, y) = f_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy \quad (4.6)$$

ただし、 f_0 は図3(b)で示される点0における物理量、 a_1, \dots, a_5 は未知係数、 x および y は点0からの相対座標を表す。このとき式(4.6)を微分すると、離散化に必要な微分項は、以下のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= a_1 + 2a_3x + a_5y, & \frac{\partial f}{\partial y} &= a_2 + 2a_4y + a_5x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2a_3, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2a_4 \end{aligned}$$

なお、未知係数は、 x 軸および y 軸方向の内点または境界点の4点と対角方向の内点1点 ($i = 5, \dots, 8$) に関する連立方程式から得られる値を平均化して求める。ただし、定義点でない対角方向(例えば、図5においては点6方向)に関する関係式は計算しないものとする。

5. 境界条件の取り扱い

直交座標系で任意領域を取り扱う際、一番問題になるのが境界条件の取り込みである。境界上で速度が与えられる場合、圧力はノイマン条件で与えられる。今回は、式(1.1), (1.2)に基づいたノイマン条件を取り込み方を提案したい。

まず、単位法線ベクトルを $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ とする。ここで、圧力 p に対してノイマン条件が与えられる場合、

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y = 0 \quad (5.1)$$

が成り立つ。さらに、式(1.1), (1.2)の両辺にそれぞれ n_x, n_y を掛けると次の式が得られる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} St \cdot n_x = F_u n_x - \frac{\partial p}{\partial x} n_x \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} St \cdot n_y = F_v n_y - \frac{\partial p}{\partial y} n_y \quad (5.3)$$

従って、式(5.1)より

$$\frac{\partial p}{\partial y} n_y = -\frac{\partial p}{\partial x} n_x \quad (5.4)$$

なので、これを式(5.3)に代入し、式(5.2), (5.3)より $\partial p / \partial x$ について解けば、それを利用して x 軸方向での圧力の境界の値を得ることができる。同様に、 y 軸方向での境界の値も計算できる。

6. 計算結果

ここでは, $Re = 750$, $St = 0.057$, $h = k = 0.05$, $\Delta t = 0.000125$ において, 8000 ステップ(すなわち, 流入条件の1周期分)まで計算を行った. 以下の図は $t = 0.6 \sim 1.0$ までの計算結果を示す(図6, 7を参照). なお, 流線の表示させるスタートラインは $x = 15.5$ に設定してある. なお, この問題は非定常であるためなかなか連続の式を満足しないので, 圧力の Poisson 方程式の右辺の項は反復段階ごとに更新している. また, Poisson 方程式を解く際には, 通常のSOR法を採用し, その残差の1次ノルムがある判定値以下になったときに反復を終了するものとした.

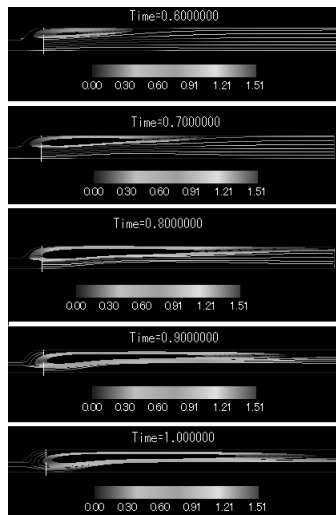


図6: 流線

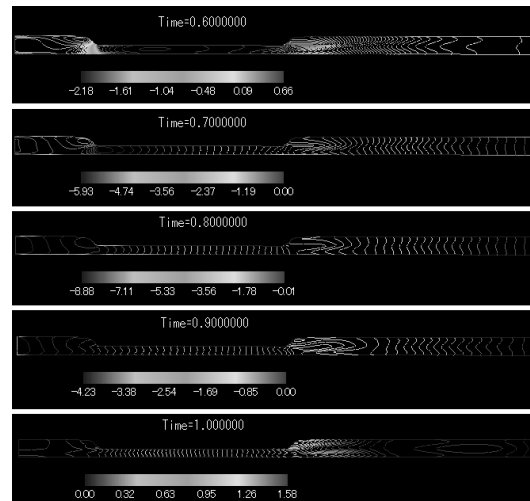


図7: 等圧力線

7. おわりに

今回の結果は, ストローハル数がやや大きいため,それほど渦流れが発生していない. しかしながら, 直交座標系を使用しても計算が可能ということが分かった. $Re = 750$ で $St = 0.024$ で固定壁内を流れる場合は, 渦流れが発生することが報告されているが([1]を参照), 今後は今回提案した計算方法でその渦を捉えられるかをきちんと検証したい.

参考文献

- [1] H.Liu and T.Yamaguchi, “Effects of Pulsation and Geometry on Post-Stenotic Oscillatory Flow”, JSME Int. J., Series C, **42**(1999), pp.612-620.
- [2] C.W.Hirt and B.D.Nichols, “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, J. Comp. Phys., **39**(1981), pp.201-225.
- [3] 白川英観・高田保之・黒木虎人・伊藤猛宏, “VOF法の改良(第2報, 表面張力項および輸送性質計算法の改良)”, 日本機械学会論文集(B編), 66巻647号(2000), pp.1667-1674.
- [4] 中野明・下村信雄・里深信行, “デカルト格子系による任意形状物体周りの圧縮性粘性流計算”, 日本機械学会論文集(B編), 61巻592号(1995), pp.4319-4326.

- [5] 西田秀利, “非スタガード差分法による非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値解”, 日本機会学会論文集 (B 編), 62 巻 599 号 (1996), pp.2646-2651.