

# 直交座標系における血流解析

松永 奈美<sup>\*</sup>, 劉 浩<sup>†</sup>, 姫野 龍太郎<sup>‡</sup>

<sup>\*</sup> 理化学研究所情報基盤研究部情報環境室

<sup>†</sup> 千葉大学工学部電子機械工学科

<sup>‡</sup> 理化学研究所情報基盤研究部情報環境室

2003年5月27日(火)

理研シンポジウム 生体力学シミュレーション

於 東京国際交流館メディアホール

# はじめに

## 【これまでの研究】

画像データのピクセル情報に着目し，その直交性をそのまま生かして直交座標系にて計算を行う方法を開発してきた．

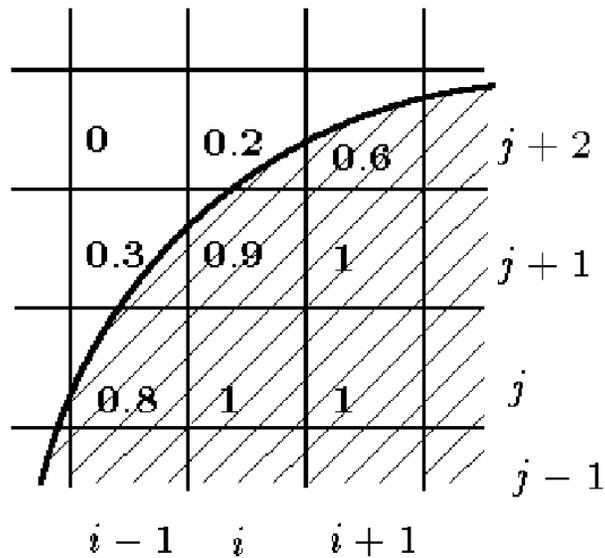
## 【メリット】

- メッシュ生成を行う必要がなく，画像データからすばやく血流解析を行うことができる．

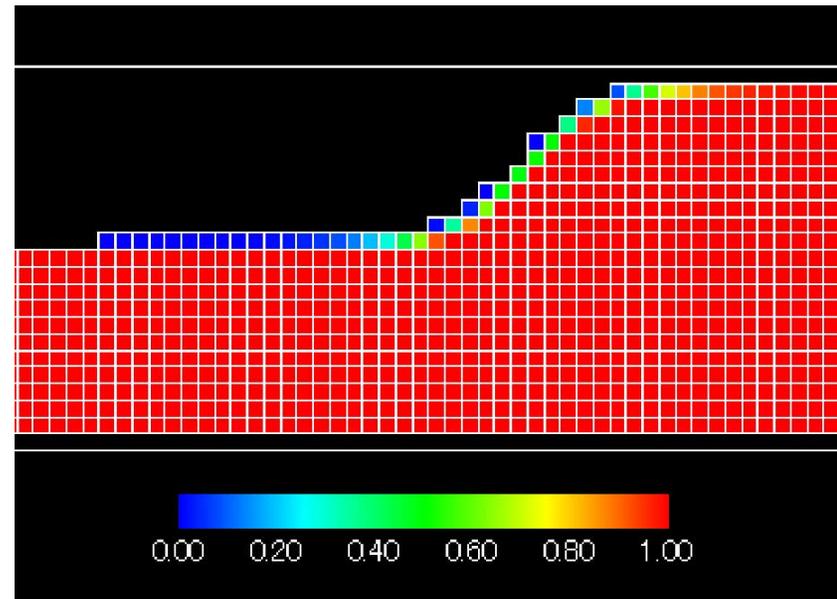
## 【今回の目的】

これまで我々が提案してきた方法のよるこれまでの計算結果（特に，医療画像を元にした血流解析の結果）をまとめて報告する．

# ● ピクセル情報



(a) Pixel data



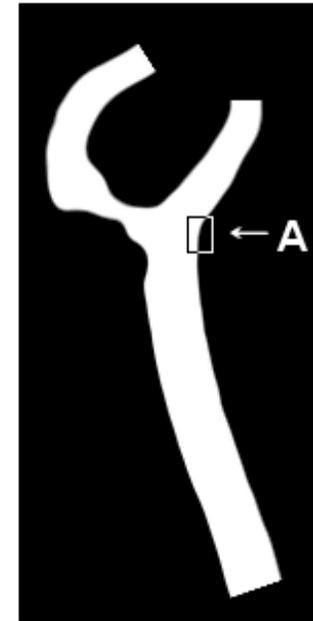
(b) Pixel image

**Fig. 1:** Pixel data and image

# ● 医療画像データ



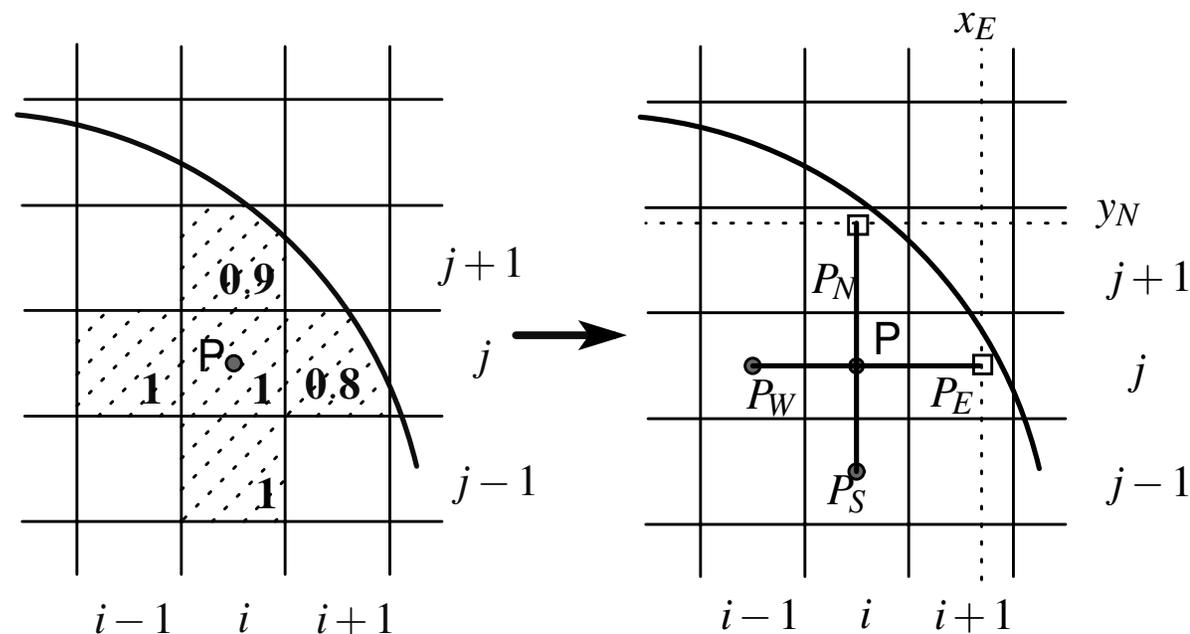
(a) Original image



(b) Enhanced image

**Fig. 2:** Data conversion

# ボクセル情報からの領域認識



**Fig. 3:** Transformation

ボクセル上の関数値  $V$  ( $0 \leq V \leq 1$ ) を用いて, 境界点  $P_E$  の座標を

$$(x_E, y_E) = (ih + h_E, jk)$$

と定める (Hirt ら (1981)). ただし,  $h_E = (0.5 + V(P_E))$ .

# 基礎方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} St = F_u - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} St = F_v - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad D := \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ただし,  $(u, v)$  は速度,  $p$  は圧力,  $St$  はストローハル数を表し,  
 $F_u, F_v$  は流束項とし

$$F_u := -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$F_v := -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

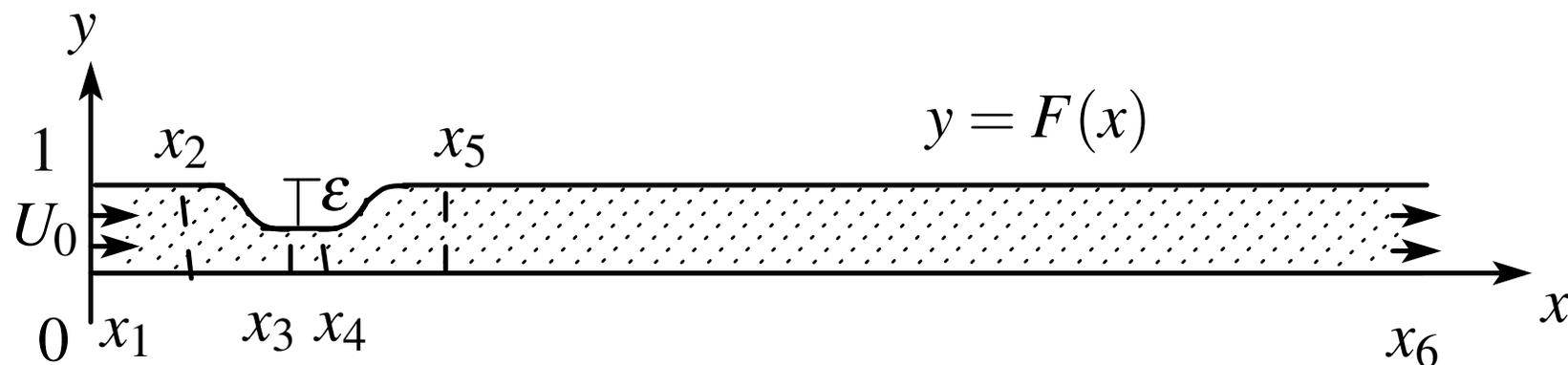
で定義する.  $\text{Re}$  はレイノルズ数を表す.

# 計算方法

- 格子点上および境界点上に未知数  $u, v, p$  を配置
- 速度-圧力のカップリング形式を採用
- 離散化: 基本的には西田の方法 (1996)
- 境界に隣接した点: NPLC 法 (中野ら (1995))
- 圧力の Poisson 方程式: SOR 法
- 時間方向に対する離散化:
  - 流束項: 2 次の Adams-Bashforth 法
  - その他: 1 次の前進 Euler 法
- 移流項: 風上差分を考慮
- 圧力に関する境界条件: Neumann 条件と基礎方程式と組み合わせた方法を採用

# 数値計算における検証

以下のような管内の流れを計算し，劉ら (1999, 2001) の結果と比較したものを示す．



**Fig. 4:** Computational stenosis models

# ● 流入速度 $U_0$ のグラフ

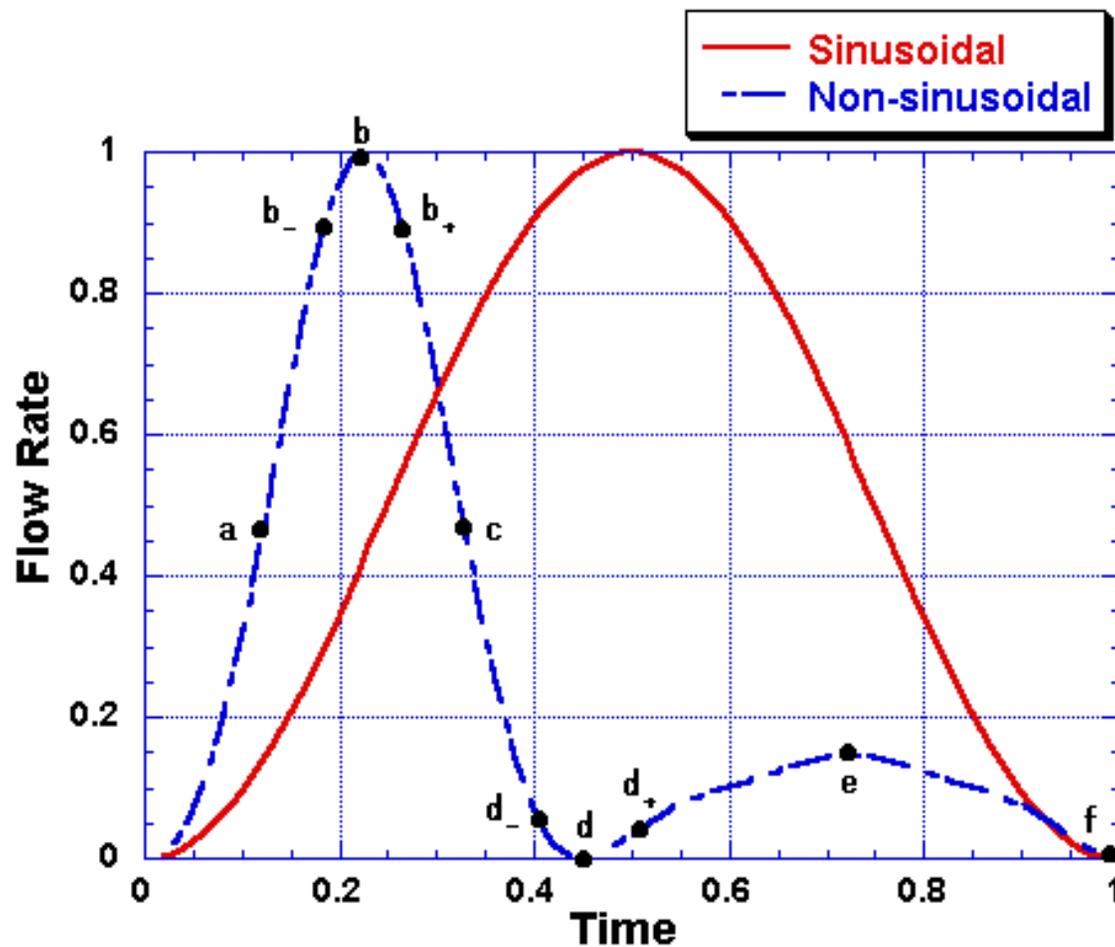


Fig. 5: Graph of incoming flows

# 狭窄部および拍動流を伴う場合の計算結果

ここでは,

$$Re = 750, St = 0.024, \varepsilon = 0.5$$

$$h = k = 0.05, \Delta t = 0.00125, 8000 \text{ step (1 周期分)}$$

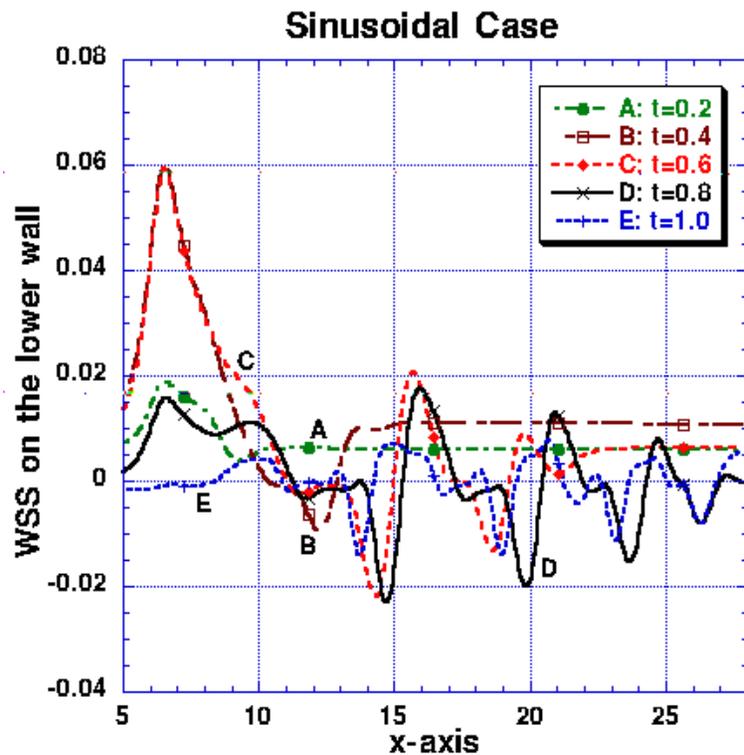
$$x_1 = 0.0, x_2 = 5.0, x_3 = x_4 = 7.5, x_5 = 10.0, x_6 = 28.0$$

とにおいて計算を行った。

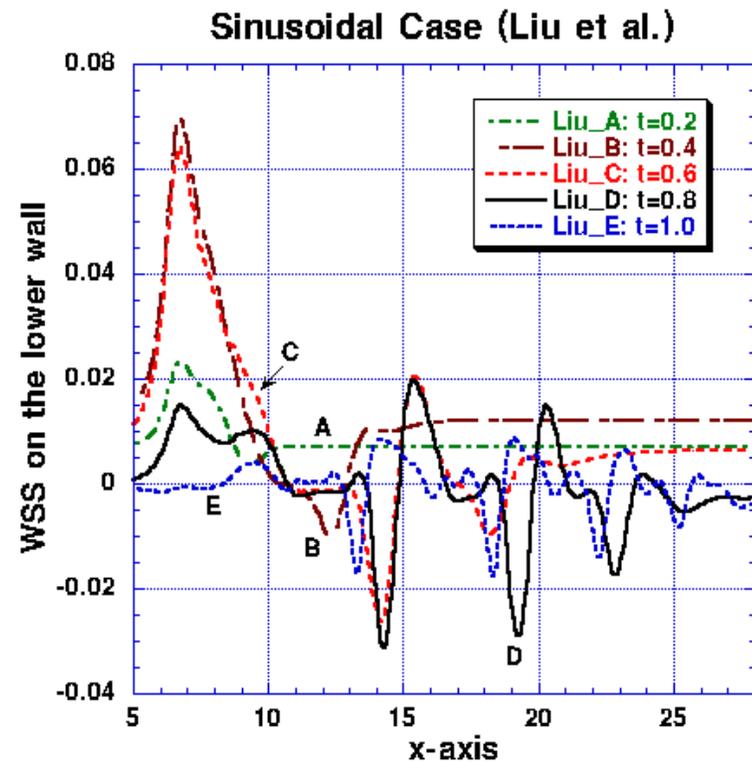
## 【境界条件】

- 固定壁上: the no-slip 条件
- 流入条件:  $(u, v) = (U_0, 0)$
- 流出条件:  $\partial u / \partial x = 0, \partial v / \partial x = 0, \partial U_0 / \partial t \cdot St = -\partial p / \partial x$

# ● 下壁におけるずり応力分布 (Sinusoidal の場合)



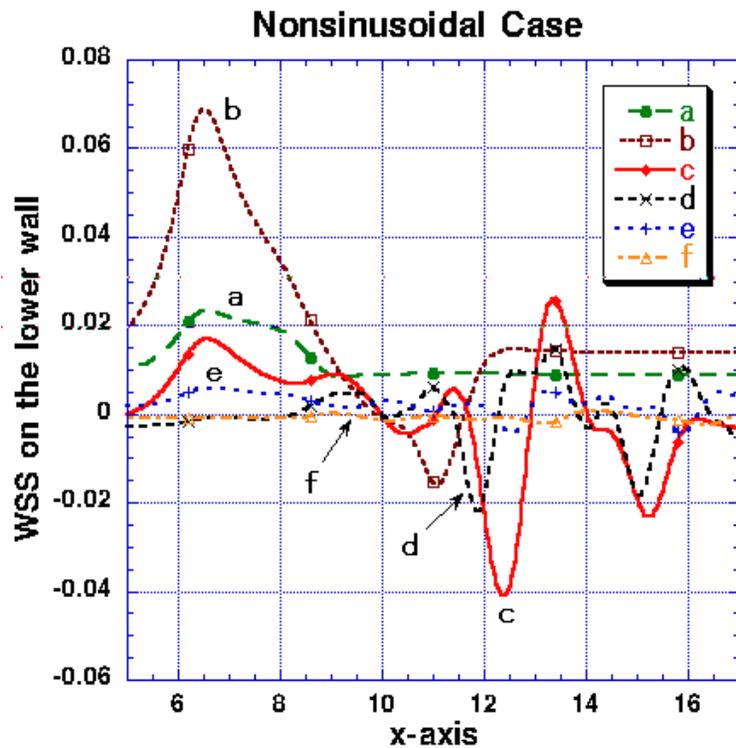
(a) Present work



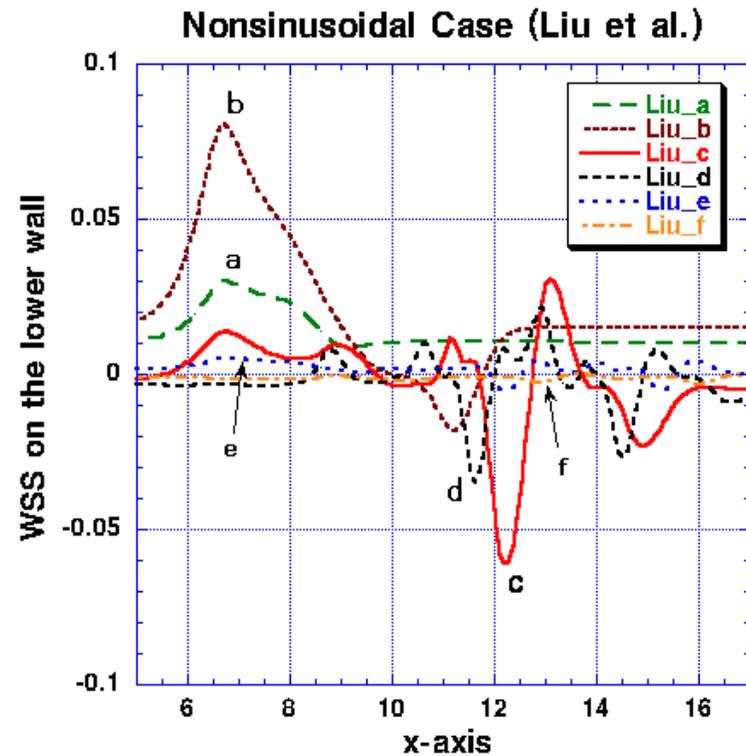
(b) Liu et al. (2001)

**Fig. 6:** WSS at  $Re = 750$  and  $St = 0.024$  with  $\varepsilon = 0.5$  in the sinusoidal case

# ● 下壁におけるずり応力分布 (Non-sinusoidal の場合)



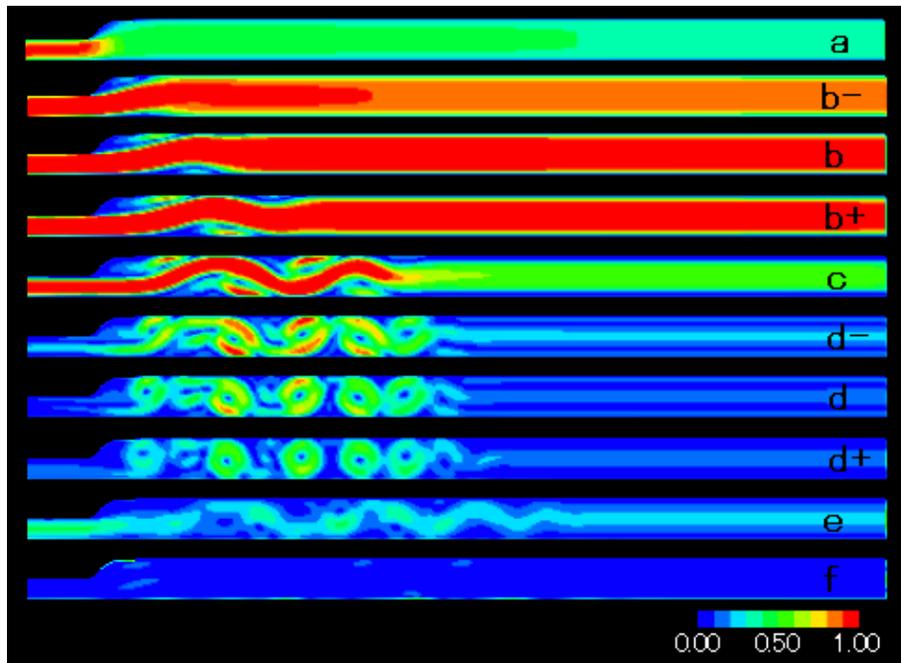
(a) Present work



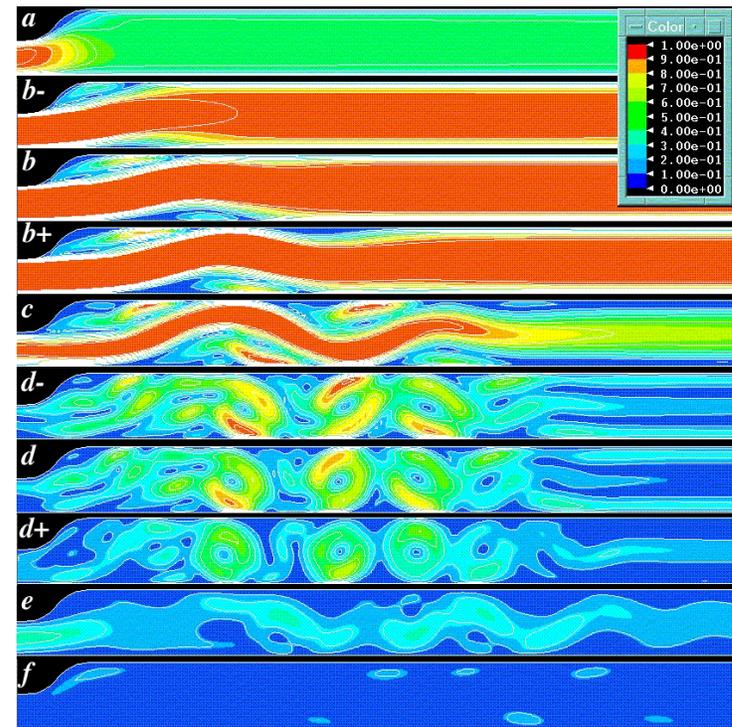
(b) Liu et al. (2001)

**Fig. 7:** WSS at  $Re = 750$  and  $St = 0.024$  with  $\varepsilon = 0.5$  in the non-sinusoidal case

# Non-sinusoidal の場合の速度分布



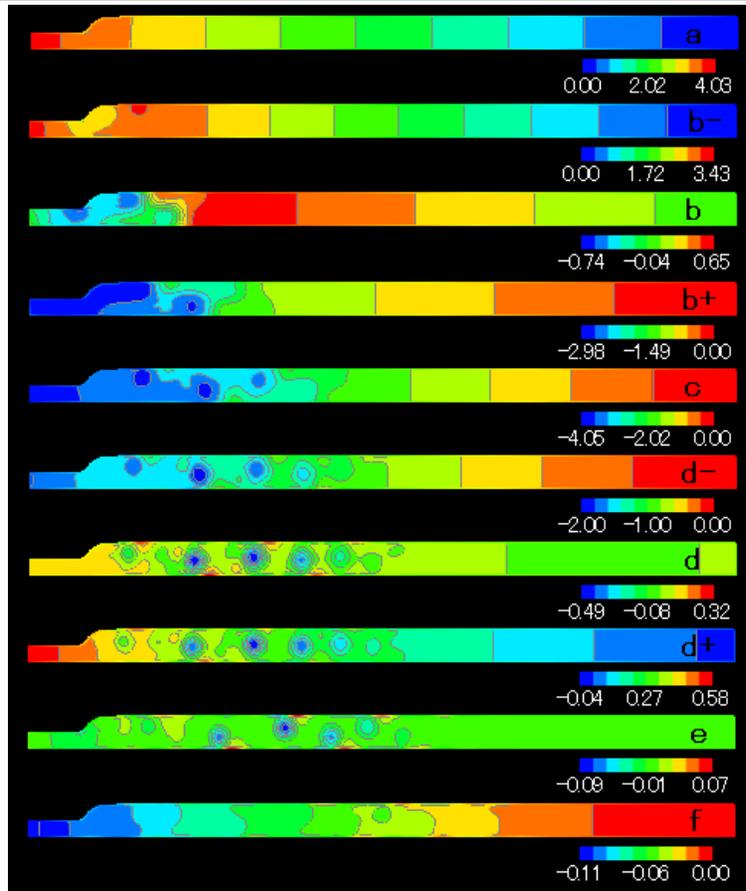
(a) Present work



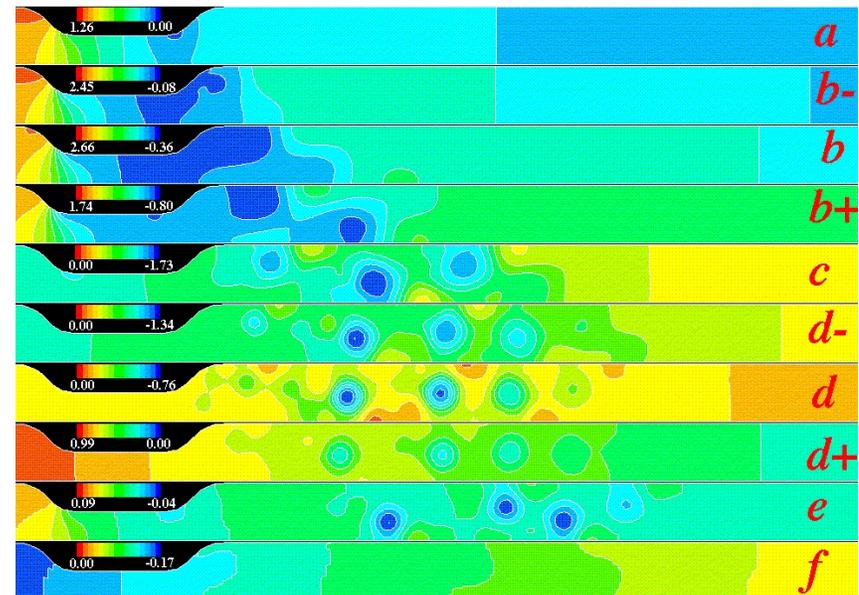
(b) Liu et al.(2001)

**Fig. 8:** Iso-velocity contours at  $Re = 750$  and  $St = 0.024$  with  $\varepsilon = 0.5$  in the non-sinusoidal case

# Non-sinusoidal の場合の圧力分布



(a) Present work



(b) Liu et al.(2001)

**Fig. 9:** Pressure contours at  $Re = 750$  and  $St = 0.024$  with  $\varepsilon = 0.5$  in the non-sinusoidal case

# 医療画像を元にした血流解析

頸動脈は顔や脳に血液を送る重要な血管であるが、狭窄を有する場合は、狭窄部後部において強い渦流れと剥離が生じやすい。また、それに伴って血管壁にかかるずり応力の変化も激しくなり、動脈硬化症を引き起こしやすく、狭窄部がより拡大することが知られている。



**Fig. 10:** Pixel data used by the calculation

# 計算条件

ここでは Olufsen ら (2000) の論文における値を参考にして、各パラメータの値を次のようにおいた。

流入部における血管の幅:  $D = 0.8 \text{ cm}$

流入部における最大流量:  $Q_p = 30 \text{ cm}^3/\text{s}$

1 周期あたりの拍動時間:  $T \doteq 1.1 \text{ s}$

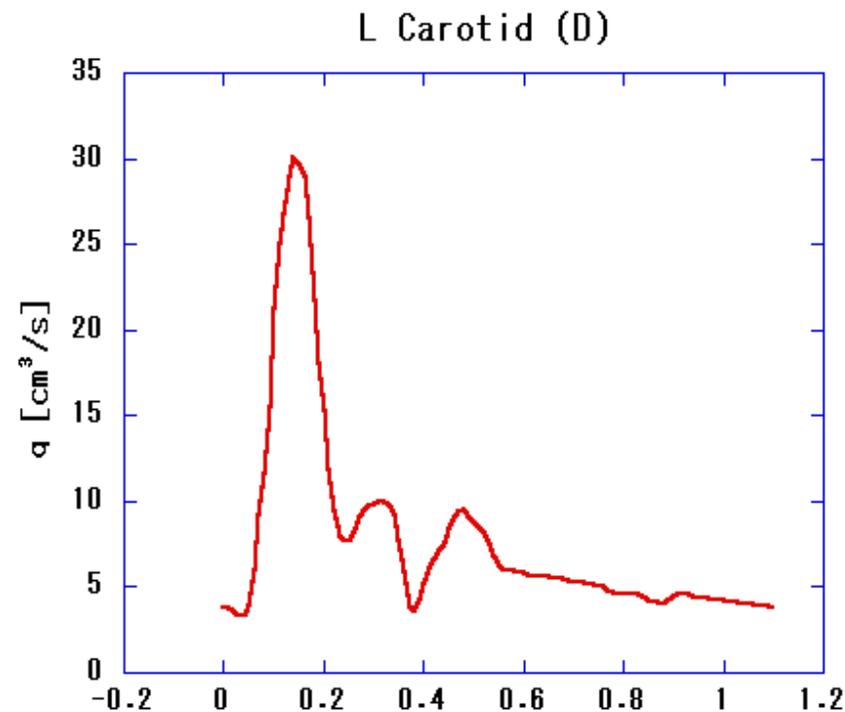
粘性係数:  $\mu = 0.049 \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{s})$

密度:  $\rho = 1.055 \text{ g}/\text{cm}^3$

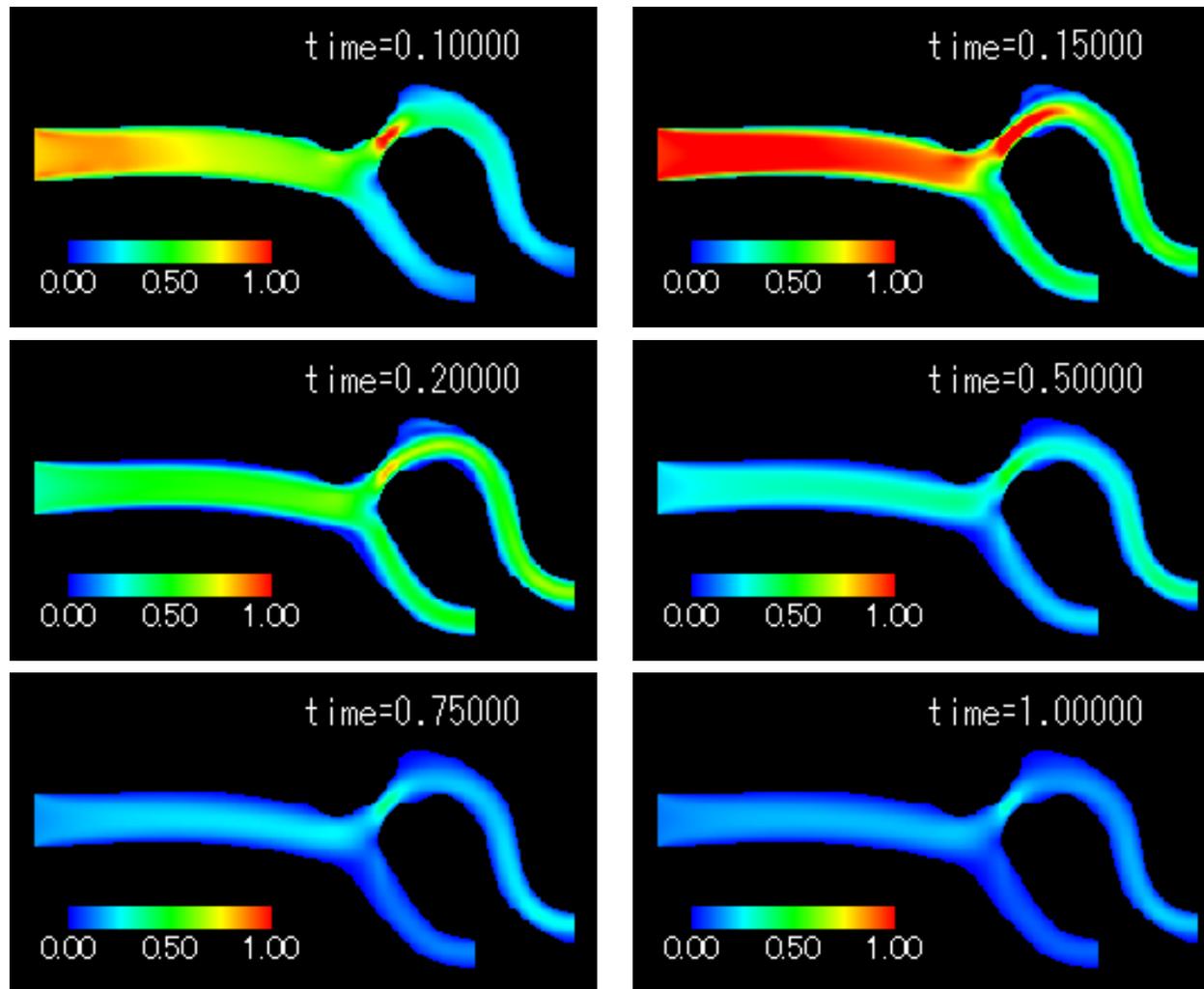
このとき,  $Re_{\max} = Q_p \rho / \mu \doteq 646$ ,  $St \doteq 0.019$  となる。

# ● 流入部における流量の変化のグラフ

Olufsen ら (2000) のデータ ( Fig.11 ) を (基本的に) 採用した。



**Fig. 11:** Flow waveform in a carotid artery (Olufsen et al. (2000))



**Fig. 12:** Iso-velocity contours

# ● 压力分布

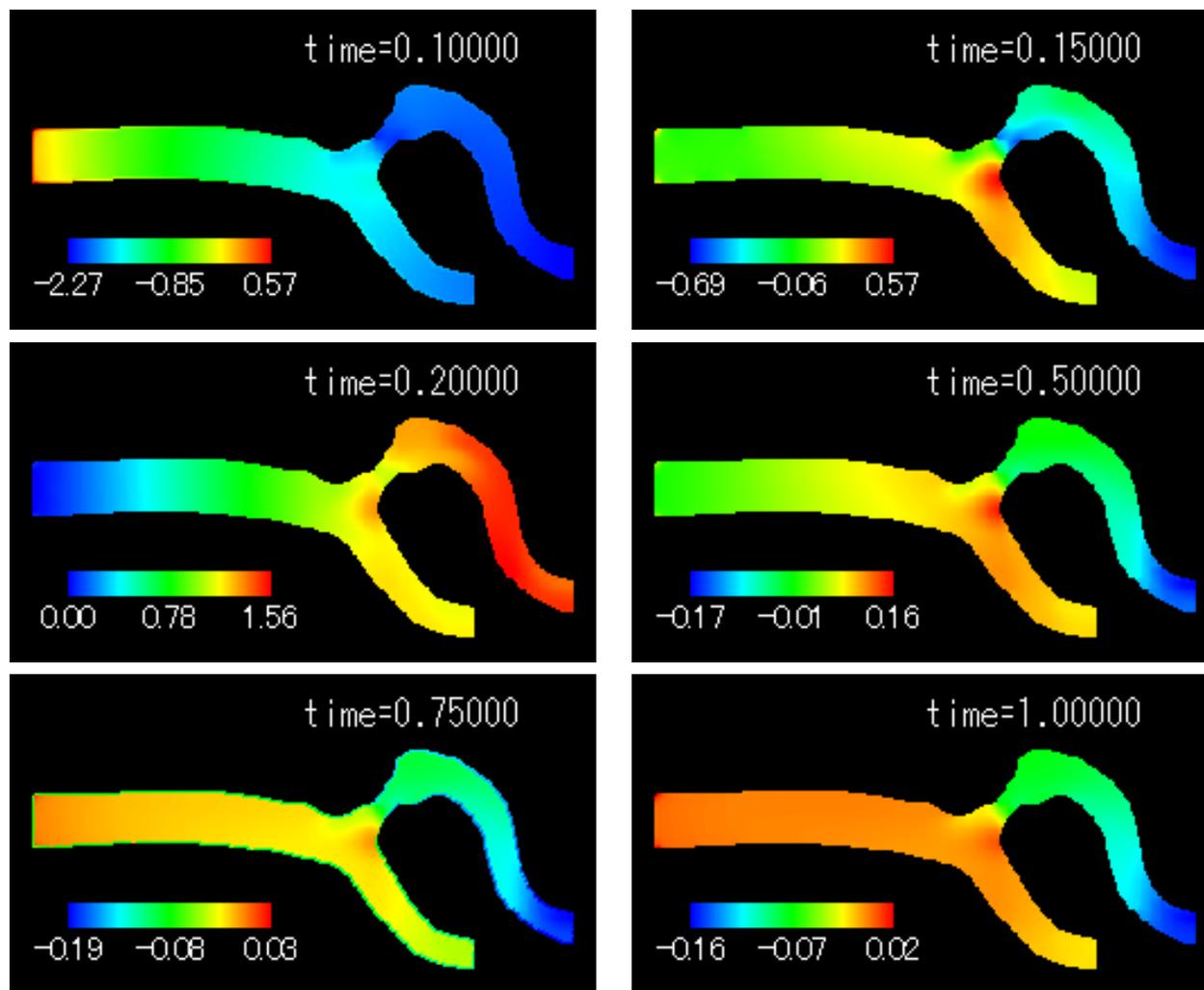
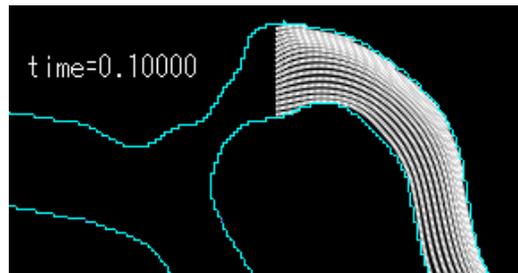
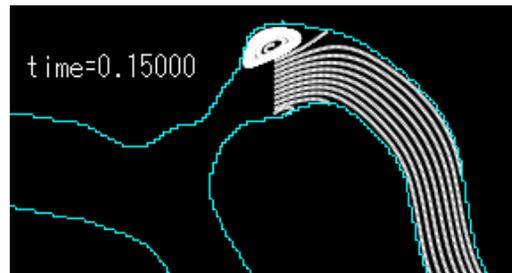


Fig. 13: Pressure contours

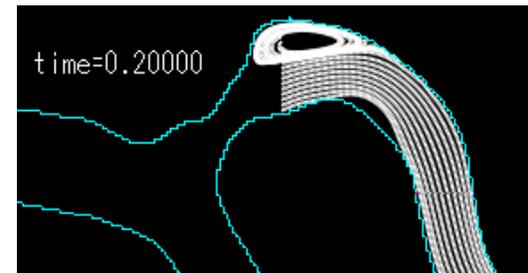
# ● 流線図 1



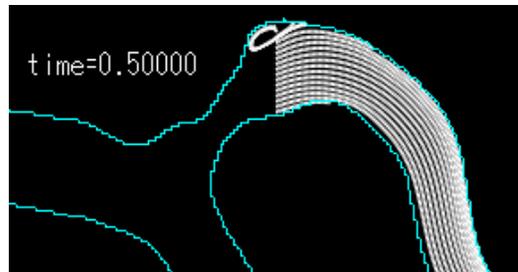
(a)  $t = 0.1$



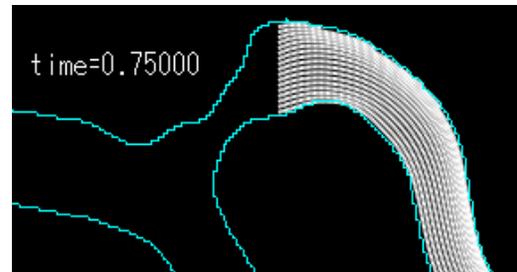
(b)  $t = 0.15$



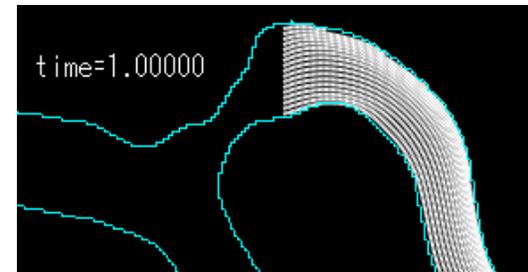
(c)  $t = 0.2$



(d)  $t = 0.5$



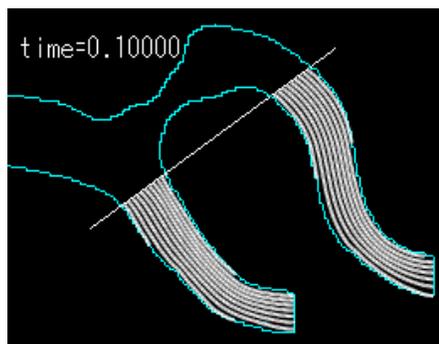
(e)  $t = 0.75$



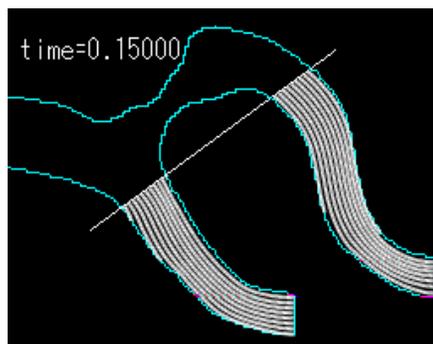
(f)  $t = 1.0$

**Fig. 14: Streamlines (1)**

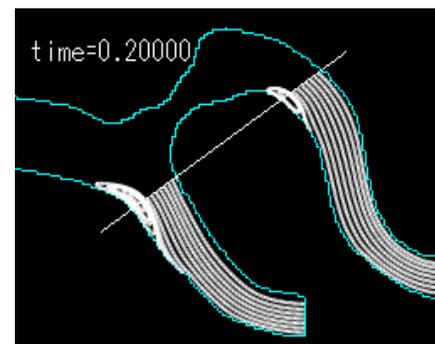
## ● 流線図2



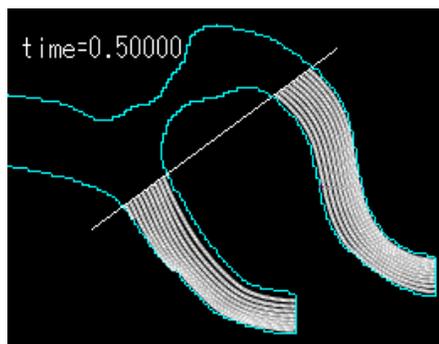
(a)  $t = 0.1$



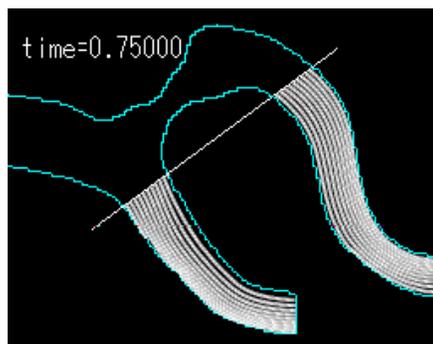
(b)  $t = 0.15$



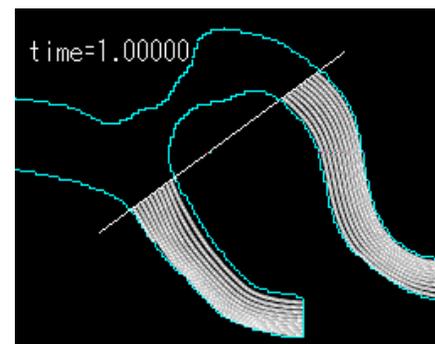
(c)  $t = 0.2$



(d)  $t = 0.5$



(e)  $t = 0.75$



(f)  $t = 1.0$

**Fig. 15: Streamlines (2)**

# まとめ

- 実際の医療画像から血管モデルを抽出した画像を元に計算を行ったが、今回の我々の計算においても、狭窄部のすぐ後ろの部分や大きく曲がっている血管部分において、強い剥離が生じていることが確認できた。

## 【今後の課題】

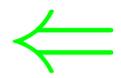
- 今後は、生理学的な境界条件も十分に考慮する必要があるとともに、3次元への拡張が当面の課題である。

# 移流項の離散化

- 点  $P_{i+1/2,j}$  における移流項の計算

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \begin{cases} u_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \frac{2d_{1+} + 3d_0 - 6d_{1-} + d_{2-}}{6h} & u_{i+\frac{1}{2},j} > 0 \\ u_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \frac{-d_{2+} + 6d_{1+} - 3d_0 - 2d_{1-}}{6h} & u_{i+\frac{1}{2},j} \leq 0 \end{cases}$$

ただし,

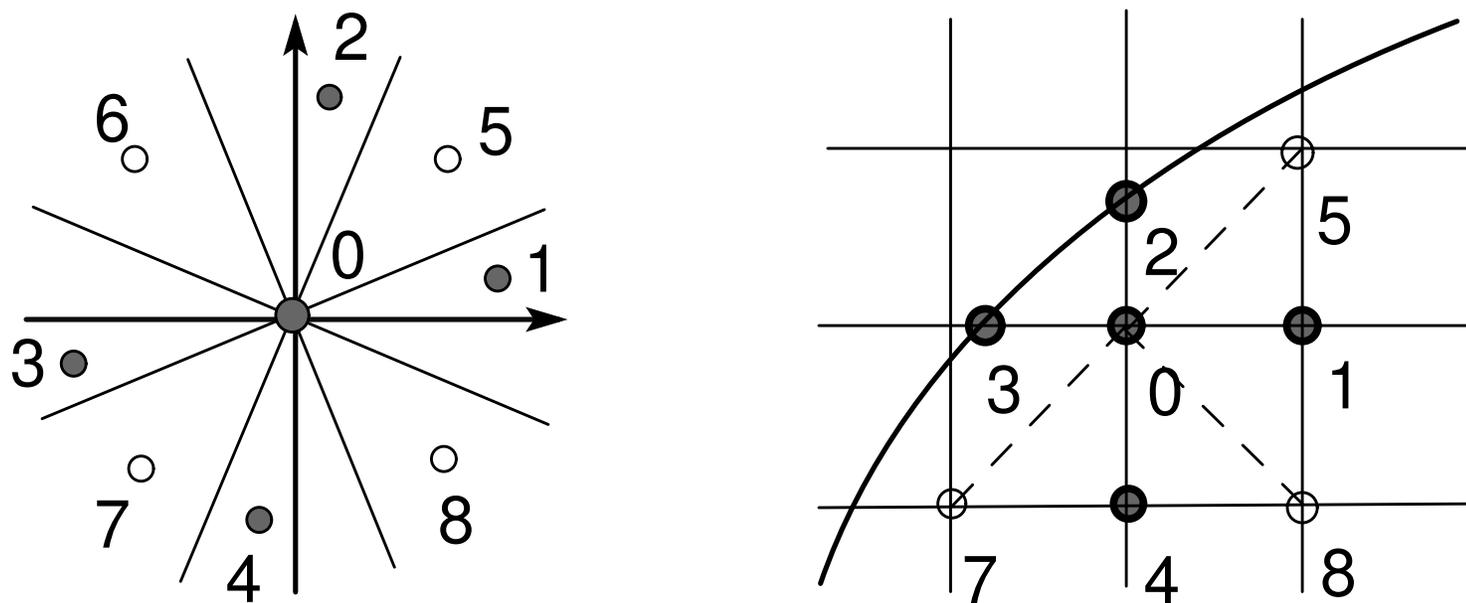
$$d_{2-} = \frac{u_{i-2,j} + u_{i-1,j}}{2} \quad d_{1-} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \quad d_0 = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}$$
$$d_{1+} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+2,j}}{2} \quad d_{2+} = \frac{u_{i-2,j} + u_{i+3,j}}{2}$$


- 境界の近くでの移流項の計算

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx u_{i+\frac{1}{2},j} \delta_x u_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{|u_{i+\frac{1}{2},j}|h}{2} \cdot \delta_{xx} u_{i+\frac{1}{2},j}$$

ただし,  $\delta_x u$  と  $\delta_{xx} u$  は, それぞれ, NPLC 法または西田の方法によって求めた 1 階微分および 2 階微分を表す. ←

# 近傍点局所選点法 (NPLC法)



**Fig. 14:** Spacial point relationship for NPLC

物理量  $f$  を以下の式にて近似する .

$$f(x, y) = f_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$$



# 境界条件

$n = (n_x, n_y)$  を単位法線ベクトルとする．境界で no-slip 条件が与えられる場合，圧力に対しては以下の条件が課せられる．

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y = 0$$

このとき， $n_x \neq 0$  かつ  $n_y \neq 0$  ならば，基礎方程式と組み合わせると，以下の式が得られる．

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \left\{ F_u - \frac{\partial u}{\partial t} St - \frac{n_y}{n_x} \left( F_v - \frac{\partial v}{\partial t} St \right) \right\}$$

