

直交座標系を用いた血流シミュレーションの試み

松永 奈美*, 劉 浩†, 姫野 龍太郎‡

* 独立行政法人理化学研究所和光研究所中央研究所
生体力学シミュレーション特別研究ユニット
埼玉県和光市広沢 2-1
matunaga@riken.jp

† 千葉大学工学部電子機械工学科
千葉県千葉市弥生町
hliu@faculty.chiba-u.jp

‡ 独立行政法人理化学研究所和光研究所中央研究所
生体力学シミュレーション特別研究ユニット
埼玉県和光市広沢 2-1
himeno@riken.jp

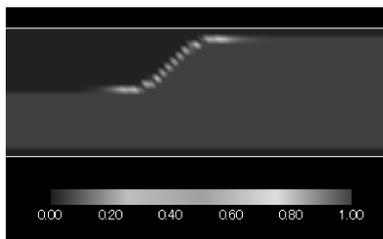
要旨 この5年間、我々は、医用画像のピクセルまたはボクセルの直交性を生かすべく、直交座標系を用いた血流シミュレーションを行ってきた。今回は、これまでの開発してきた直交座標系を用いたさまざまな血流計算の結果を報告する。

1. 緒言

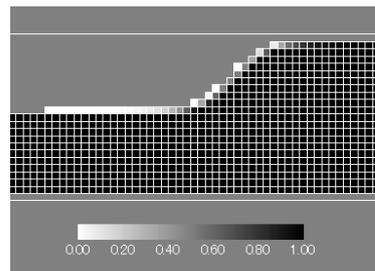
MRI や CT, X線などの医用画像はピクセルまたはボクセルの情報をもっているが、そのピクセルまたはボクセル情報の直交性をそのまま生かして直交座標系で計算を行う方法がないかと考え、これまで我々は、直交座標系を用いた計算手法を開発してきた。この方法のメリットは、メッシュ生成を行う必要がまったくなく、画像データからすばやく血流解析を行うことができる点にある。今回は、この5年間における我々が提案してきた方法によるこれまでの計算結果 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] をまとめて報告する。

2. 画像データからの領域の認識

医療画像を取り込んだ場合、そのデータは、2次元の場合は1つのピクセルに0から1の実数値として与えることができる。(Fig.1を参照.)



(a)



(b)

Fig. 1: (a) 0~1での値表示 と (b) ピクセル情報

しかしながら、実際の医療画像（X線画像）においては、例えば Fig. 2 (a) のように、たいていの場合はノイズがあるため、そのままの画像を切り出して血流計算を行うことはできない。そこで、ここでは、あらかじめ使用する画像データにぼかしを使ってノイズを除去し、フィルタをかけてあらかじめ対象領域を強調した画像データ（Fig. 2 (b)）を作成し、その画像データを用いて計算を始めるものとする。このとき、各ピクセルでの値は 0 から 255 までの値をもち、境界に近い部分のデータは、Fig. 2 (b) の A の部分のような色合いとなっている。従って、この画像データから 0 から 1 への値に変換することが容易に行うことができ、血管の境界部分は 0 から 1 の間の値をもつピクセル上に存在していることが分かる。

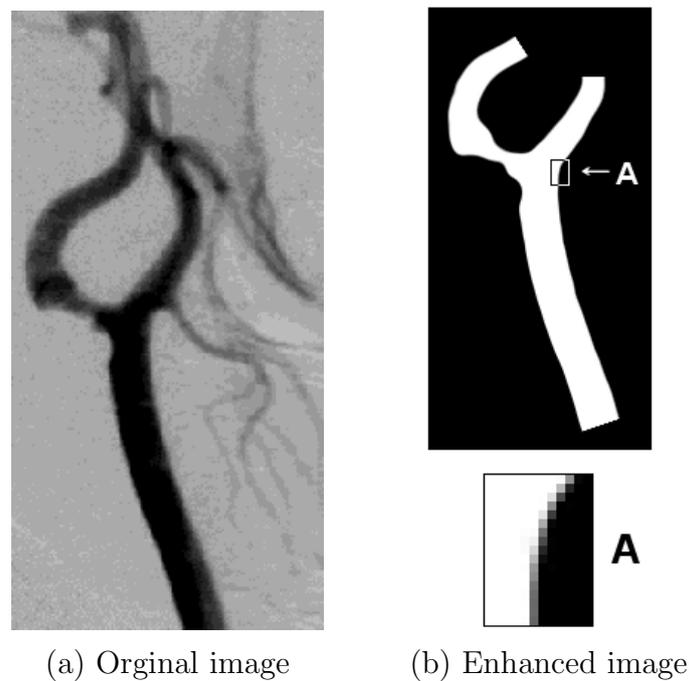


Fig. 2: Data conversion

さて、画像処理を行ったデータから、Hirt ら [8] の VOF (fractional Volume Of Fluid) の考えに基づき、計算を行うための境界点の座標を決定する。

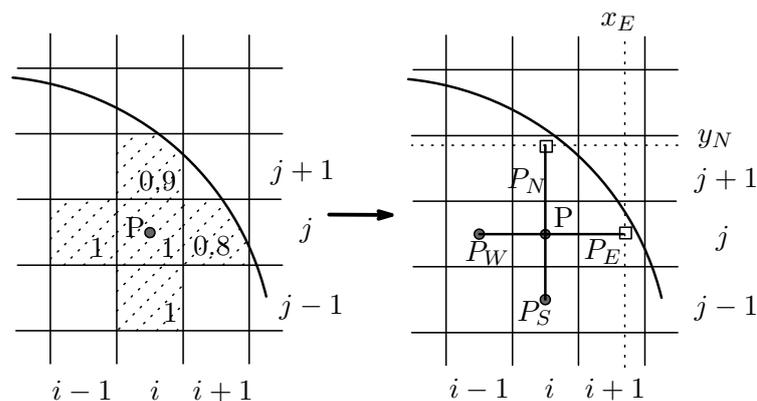


Fig. 3: Transformation

基本的にボクセルの中心に点を配置する．さらに，対象領域 Ω 内にある点 P に対して，隣接した4点と点 P から各点までの距離をそれぞれ P_E, P_W, P_S, P_N および h_E, h_W, k_S, k_N で表すものとする (Fig. 3)．また，ボクセル上の関数値 (VOF 関数) を F 関数と表すとき，境界付近の F 関数の有限体積的な解釈を考慮して境界点の座標を定義する．

$F(P) = 1$ が成り立つとき，点 P は内点と呼ぶこととする．このとき，内点 P に対して $F(P_E) \neq 1$ が成り立つとき，

$$h_E = (0.5 + F(P_E))h$$

で定義すれば点 P_E は境界点として定義され，その座標は $(x_E, y_E) = (ih + h_E, jk)$ により計算できる．ただし， h, k はそれぞれ x 軸方向， y 軸方向のメッシュ幅を表すものとする．その他の境界点に対しても同様の計算を行うものとする．このとき， h_E, h_W および k_S, k_N の値は各方向のメッシュ幅の0.5倍から1.5倍の長さになることに注意する．

3. 基礎方程式および計算方法

2次元非圧縮性流体解析を行う場合は，一般には流体の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式と連続の式を対象とするが，拍動を伴う場合は具体的には次のような方程式を解くことになる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} St = F_u - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} St = F_v - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.1)$$

$$D := \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

ただし， (u, v) は速度， p は圧力， St はストローハル数， F_u, F_v は流速項を表し，

$$F_u := -u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.3)$$

$$F_v := -u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.4)$$

で定義されるものとする．また， Re はレイノルズ数を表す．

ここでは，第2節で述べた方法にて医療画像からある程度ノイズを除いた画像を読み込んで計算を行うことを前提とする．また，未知数 u, v, p を全て格子点上または境界点上に配置する．さらに，計算方法としては，時間進行の過程で連続の式を満足する方向に反復修正をする必要があると思われるため，ここでは速度-圧力のカップリング形式を採用した．すなわち次のような手順で計算を進めるものとする [4]．

Step1. 式 (3.1), (3.2) を，流速項に対しては2次の Adams-Bashforth 法，その他の部分に関しては1次の前進 Euler 法を用い，次式から仮速度 u^*, v^* を計算する．

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^* = u_{i+\frac{1}{2},j}^n + \frac{\Delta t}{St} \left(\frac{3F_{u i+\frac{1}{2},j}^n - F_{u i+\frac{1}{2},j}^{n-1}}{2} - \frac{\partial p^n}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \right)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^* = v_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{St} \left(\frac{3F_{v,i,j+\frac{1}{2}}^n - F_{v,i,j+\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} - \frac{\partial p^n}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \right)$$

ただし、上付き添字 n は時間ステップ数、 Δt は時間刻み幅を表す。

Step2. 次に、 u^{n+1}, v^{n+1} を $n+1$ 時間ステップ目の速度場とし、 p^{n+1} を $n+1$ 時間ステップ目の圧力とすると、次式を満たすような圧力 p^{n+1} を求めることを考える。

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - u_{i+\frac{1}{2},j}^* = \frac{\Delta t}{St} \left(-\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\partial p^n}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \right) \quad (3.5)$$

$$v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{i,j+\frac{1}{2}}^* = \frac{\Delta t}{St} \left(-\frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\partial p^n}{\partial y} \Big|_{i,j+\frac{1}{2}} \right) \quad (3.6)$$

ここで、 $n+1$ 時間ステップ目で

$$D_{i,j}^{n+1} = 0$$

を満たすという条件から、次式を得る。ここではSOR法によって圧力を求めるものとする。

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{St}{\Delta t} D_{i,j}^* + \frac{\partial^2 p^n}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \frac{\partial^2 p^n}{\partial y^2} \Big|_{i,j}$$

Step3. Step2 で求めた圧力を式 (3.5), (3.6) に代入して、次時間ステップでの速度 u^{n+1}, v^{n+1} を求め、 $D_{i,j}^{n+1} = 0$ (計算上ではある判定条件の値以下) を満たさない場合は、

$$u_{i+\frac{1}{2},j}^* = u_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}, \quad v_{i,j+\frac{1}{2}}^* = v_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad p_{i,j}^n = p_{i,j}^{n+1}$$

と置き直して Step2 に戻る。そうでなければ、次時間ステップの速度が求めたものとして Step1 戻って計算を繰り返す。

さて、空間微分の離散化に対しては基本的には西田の論文 [9] に従い、レギュラー格子を使いながらも微分項はスタガード法的な計算方法を用いる。Step1 での計算から分かるように、流速項 F_u および F_v に対してボクセルの辺中点での値を必要とするが、ここでは次のように離散化を行う。

まず、ボクセルの辺中点での速度成分を隣合う格子点の単純平均を用いて

$$\begin{aligned} u_{i\pm\frac{1}{2},j} &= \frac{u_{i,j} + u_{i\pm 1,j}}{2}, & v_{i\pm\frac{1}{2},j} &= \frac{v_{i,j} + v_{i\pm 1,j}}{2} \\ u_{i,j\pm\frac{1}{2}} &= \frac{u_{i,j} + u_{i,j\pm 1}}{2}, & v_{i,j\pm\frac{1}{2}} &= \frac{v_{i,j} + v_{i,j\pm 1}}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

とする。このとき、例えば $F_{u,i+1/2,j}$ における各微分項は次のような2次精度の中心差分式にて離散化される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2k} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &\approx \frac{1}{2h} \left(\frac{u_{i+2,j} - u_{i+1,j}}{h} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \right) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$F_{v,i,j+1/2}$ の各微分項に対しても、以下のように同様の計算を行う。ただし、移流項の部分は風上差分を適用するため、式 (3.8) の 1 階微分の式は境界近くの内点の一部でのみ用いることに注意する。さらに、圧力の微分についても同様な離散化を行う。

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h} \tag{3.9}$$

ただし、圧力の微分に関しては、例えば点 $P(i, j)$ が内点で、点 $(i + 1, j)$ が内点でない場合は、以下のような差分に切り替えることとする。

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{p(P_E) - p_{i,j}}{h_E} \tag{3.10}$$

ここで、 P_E および h_E は Fig. 3 に従った。また、 $\partial p/\partial y$ に対しても同様の計算を行う。

さらに、境界に隣接した点での微分項を計算する場合、仮想点が必要となるが、ここでは仮想点を置く代わりに近傍点局所選点法 [10] (Neighboring Point Local Collocation Method: NPLC) を使うこととする。まず、Fig. 4 のように点 0 を中心として各々の方向に番号をつける。離散化に必要な物理量を f とするとき、境界に隣接した内点の周りの f の分布を位置に関する 2 次関数に近似する。

$$f(x, y) = f_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy$$

ただし、 f_0 は Fig. 4 で示される点 0 における物理量、 a_1, \dots, a_5 は未知係数、 x および y は点 0 からの相対座標を表す。

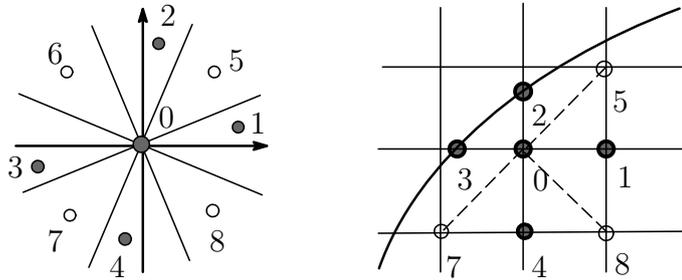


Fig. 4: Spacial points relation for NPLC

このとき、離散化に必要な微分項は以下のようにして求めることができる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= a_1 + 2a_3x + a_5y, & \frac{\partial f}{\partial y} &= a_2 + 2a_4y + a_5x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2a_3, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2a_4
\end{aligned}$$

なお、未知係数は x 軸および y 軸方向の内点または境界点の 4 点と対角方向の内点 1 点 ($l = 5, \dots, 8$) に関する以下の行列から得られる値を平均化して求める。

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 \\ x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 \\ x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3^2 & x_3 y_3 \\ x_4 & y_4 & x_4^2 & y_4^2 & x_4 y_4 \\ x_l & y_l & x_l^2 & y_l^2 & x_l y_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - f_0 \\ f_2 - f_0 \\ f_3 - f_0 \\ f_4 - f_0 \\ f_l - f_0 \end{pmatrix} \quad (l = 5, \dots, 8)$$

ただし、定義点でない対角方向（例えば、Fig. 4 においては点 6 方向）に関する関係式は計算しないものとする。

なお、移流項に関しては、領域内部では 3 次精度の風上差分を使い、境界付近では NPLC にて計算を行った微分を用いて 1 次の風上差分の代用式を用いるものとする。ただし、 $(i + 1/2, j)$ や $(i, j + 1/2)$ での微分の値を必要とするため、次のような方法を取った。

例えば、点 $P_{i+1/2,j}$ における F_u の中の移流項 $u \cdot \partial u / \partial x$ を計算する場合、参照する点がすべて内点であれば

$$\begin{aligned} d_{2-} &= \frac{u_{i-2,j} + u_{i-1,j}}{2}, \\ d_{1-} &= \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2}, \\ d_0 &= \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}, \\ d_{1+} &= \frac{u_{i-1,j} + u_{i+2,j}}{2}, \\ d_{2+} &= \frac{u_{i-2,j} + u_{i+3,j}}{2} \end{aligned}$$

と置き、3 次精度の風上差分:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} \approx \begin{cases} u_{i+1/2,j} \cdot \frac{2d_{1+} + 3d_0 - 6d_{1-} + d_{2-}}{6h} & u_{i+1/2,j} > 0, \\ u_{i+1/2,j} \cdot \frac{-d_{2+} + 6d_{1+} - 3d_0 - 2d_{1-}}{6h} & u_{i+1/2,j} \leq 0 \end{cases}$$

を適用する。ただし、各 d 自身の打ち切り誤差の 2 次精度なので、内点での移流項の誤差も 2 次精度となることに注意する。それ以外の場合は、NPLC または西田の方法で求めた 1 階微分: $\delta_x u$ および 2 階微分: $\delta_{xx} u$ を使い、粘性項を考慮した次式に置き換えて計算を行うものとする。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} \approx u_{i+1/2,j} \delta_x u_{i+1/2,j} - \frac{|u_{i+1/2,j}| h}{2} \cdot \delta_{xx} u_{i+1/2,j}$$

なお、点 $P_{i+1/2,j}$ が最も境界に近い場合は、各微分を計算する際 2 次関数で近似されているため上式は 1 次精度になることに注意する。

上記以外の F_u の微分項も、先ほどと同様に粘性項を考慮した式にて計算を行うものとする。また、 F_v 側の移流項に関しても同様の計算を行う。

4. 境界条件の取り扱い

固定壁上では流速 (u, v) が与えられるため、圧力はノイマン条件で与えられるが、ここでは式 (3.1) と組み合わせてノイマン条件の取り込みを行うものとする [3, 4].

単位法線ベクトルを $n = (n_x, n_y)$ とする. ここで、圧力 p に対してノイマン条件が与えられる場合、

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial x} n_x + \frac{\partial p}{\partial y} n_y = 0 \quad (4.1)$$

が成り立つ. また、 $n_x \neq 0$ かつ $n_y \neq 0$ のとき、(3.1) と (4.1) より、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \left\{ F_u - \frac{\partial u}{\partial t} St - \frac{n_y}{n_x} \left(F_v - \frac{\partial v}{\partial t} St \right) \right\} \quad (4.2)$$

を得る. 従って、例えば点 P_E が境界点であるならば、

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p(P_E) - p(P)}{h_E}$$

より、点 P_E での圧力の値 $p(P_E)$ を計算することができる. また、もし $n_y = 0$ のときは、

$$\frac{\partial p}{\partial x} = F_u - \frac{\partial u}{\partial x} St$$

の関係式から $p(P_E)$ の値を計算すればよい.

5. 数値計算による検証

ここでは、Fig. 5 のような管内の流れ [11, 12, 13] を計算し、劉らの結果 [11, 12] と比較したものを示す. ただし、与えられる形状に x 軸方向に h 、 y 軸方向に k のメッシュ幅をもつメッシュを張り巡らせ、さらに領域の面積比として各ボクセルにデータを与え、そのボクセルデータから計算を始めるものとする.

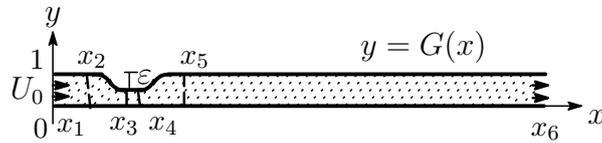


Fig. 5: Computational stenosis models

また、その上部の形状は下記の関数 $G(x)$ で表されるものとする.

$$\begin{aligned} G(x) &= 1 & (x_1 < x < x_2), \\ G(x) &= 1 - 0.5\epsilon \{1 + \tanh \alpha(x - x_a)\} & (x_2 \leq x \leq x_3), \\ G(x) &= 1 - \epsilon & (x_3 < x < x_4), \\ G(x) &= 1 - 0.5\epsilon \{1 - \tanh \alpha(x - x_b)\} & (x_4 \leq x \leq x_5), \\ G(x) &= 1 & (x_5 < x < x_6) \end{aligned}$$

ここで、 ϵ 、 α はパラメータで、それぞれ $0.1 \leq \epsilon \leq 0.6$ 、 $\alpha = 4.14$ を満たすものとし、

$$x_a = (x_2 + x_3)/2, \quad x_b = (x_4 + x_5)/2$$

と定める．また，流入条件としては次の2種類の流速を与える (Fig.6).

$$U_0(t) = \begin{cases} 0.5(1 - \cos(2\pi t)) & (\text{Sinusoidal}), \\ 0.251 + 0.290(\cos \varphi + 0.97 \cos 2\varphi \\ + 0.47 \cos 3\varphi + 0.14 \cos 4\varphi) & (\text{Non-sinusoidal}) \end{cases}$$

ただし， $\varphi = 2\pi t - 0.14142$ である．

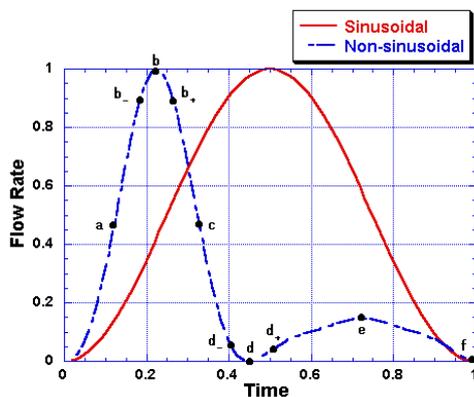


Fig. 6: Graph of incoming flows

固定壁内における振動流を伴う血管内の流れに関して，劉らの計算結果 [11, 12] と比較を行うため， $Re = 750$ ， $St = 0.024$ ， $\varepsilon = 0.5$ に対して計算を行った．また，空間および時間方向に対するキザミ幅は，それぞれ $h = k = 0.05$ ， $\Delta t = 0.00125$ とし，8000 ステップ（すなわち1周期分）まで計算を行った．

境界条件としては，固定壁には no-slip 条件を与え，流入条件として $(u, v) = (U_0, 0)$ ， $\partial p / \partial x = 0$ ，流出条件として $\partial u / \partial x = 0$ ， $\partial v / \partial x = 0$ ， $\partial U_0 / \partial x \cdot St = -\partial p / \partial x$ を与えた．また， x_1 から x_6 までのパラメータに対しては，sinusoidal の流れの場合は $x_1 = 0.0$ ， $x_2 = 3.0$ ， $x_3 = 5.5$ ， $x_4 = 6.0$ ， $x_5 = 9.0$ ， $x_6 = 28.0$ とし，non-sinusoidal の流れの場合は $x_1 = 0.0$ ， $x_2 = 5.0$ ， $x_3 = x_4 = 7.5$ ， $x_5 = 10.0$ ， $x_6 = 28.0$ にて計算を行った．

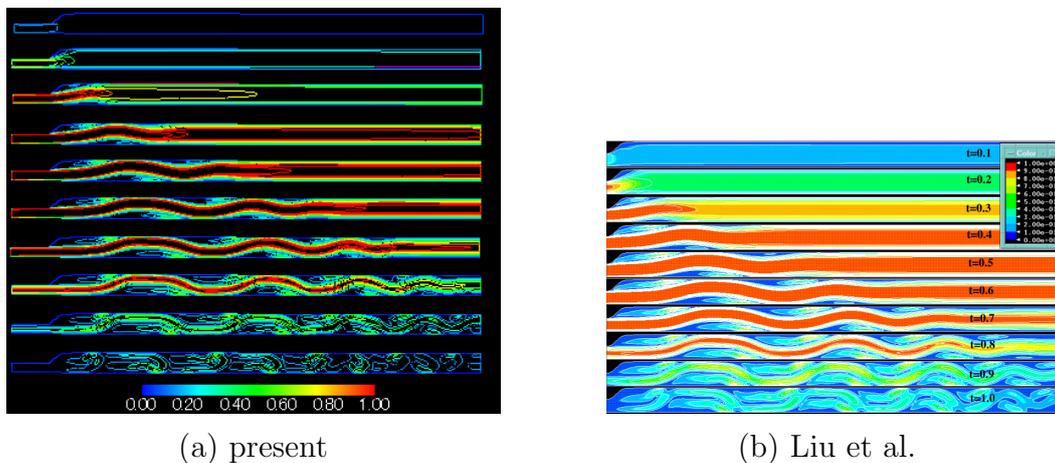
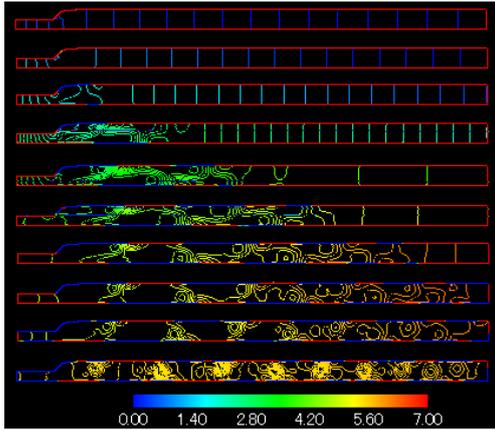
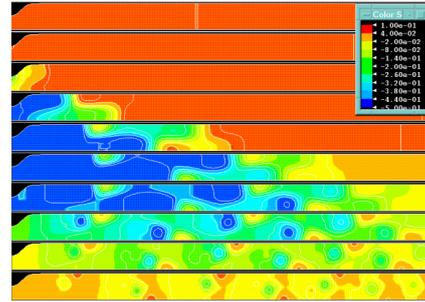


Fig. 7: Iso-velocity contours at $Re = 750$ ， $St = 0.024$ with $\varepsilon = 0.5$ in sinusoidal case

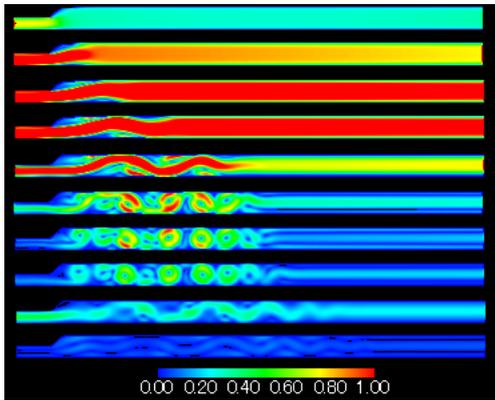


(a) present

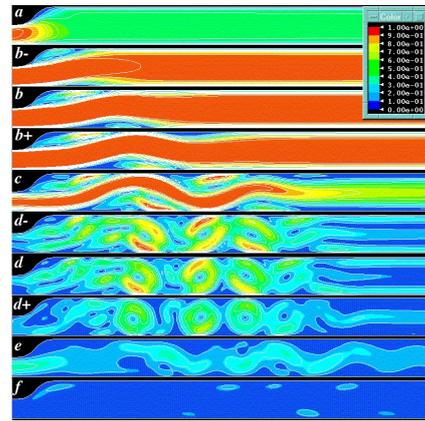


(b) Liu et al.

Fig. 8: Pressure contours at $Re=750$, $St=0.024$ with $\varepsilon=0.5$ in sinusoidal case

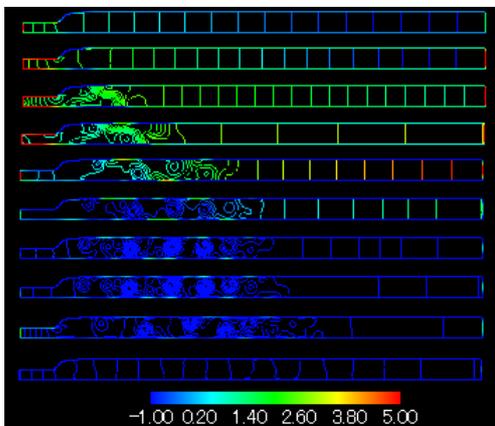


(a) present

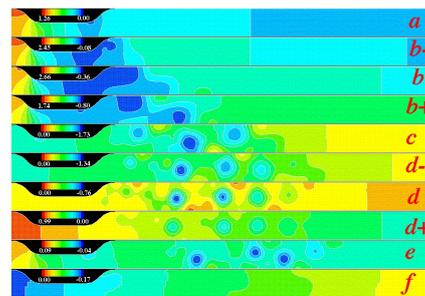


(b) Liu et al.

Fig. 9: Iso-velocity contours at $Re=750$, $St=0.024$ with $\varepsilon=0.5$ in nonsinusoidal case



(a) present



(b) Liu et al.

Fig. 10: Pressure contours at $Re=750$, $St=0.024$ with $\varepsilon=0.5$ in nonsinusoidal case

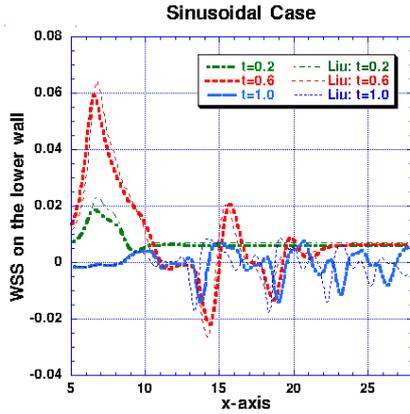


Fig. 11: Comparison of wall shear stress distribution on lower walls with those by Liu et al.(1999) in sinusoidal case

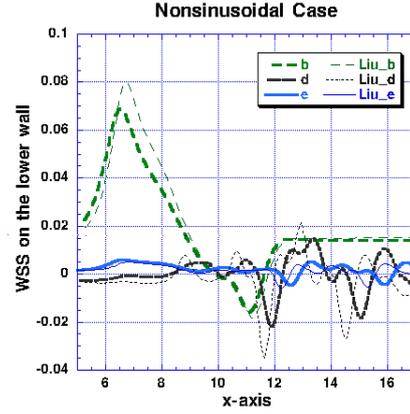


Fig. 12: Comparison of wall shear stress distribution on lower walls with those by Liu et al.(1999) in nonsinusoidal case

Fig. 7および Fig. 8 は sinusoidal の場合における無次元時間 $t = 0.1$ から 1.0 までの 0.1 ごとの流速と圧力の分布, Fig. 9 および Fig. 10 は non-sinusoidal の場合における Fig. 6 での点 a から点 f までの各点での流速と圧力の分布をそれぞれ表す. また, Fig. 11 および Fig. 12 は, 下側の壁におけるそれぞれのずり応力を比較したものである.

それぞれの場合における流れの現象としては, 流入速度がピークを過ぎて減速に転じると, いずれの場合も狭窄部の後部において渦流れが発生していることが分かる. また sinusoidal の場合は, $t = 0.5$ 以降徐々に渦流れが現れていくが, non-sinusoidal の場合は, $t = 0.5$ までの速度変化がかなり激しいためか, 急激な流速の減衰が起こっている部分以降 (特に Fig. 6 の点 d の時間前後) において強い渦流れが発生している. これは, 例えばバックステップ流れのように流入速度が一定に与えられている場合とは異なり, 拍動流および狭窄部をもつ領域による特有の現象であることが理解できる.

なお, いずれの図からも分かるように, 我々の計算結果は 劉ら [11, 12] の固定壁における計算結果と比較しても良い結果を得ていることが分かる. 特に, ボクセル情報を元にダイレクトに直交座標系に変換して計算を行っているにもかかわらず, いずれのケースの場合も振動流を伴う管内の流れの現象をうまく捉えていることが分かる.

6. 医用画像を元にした狭窄部を有する場合の血流解析

次に, 実際の医用画像を元にして計算を行った計算結果を報告する. なお, 境界条件の計算を簡単にするため, 計算用の画像は (Fig. 2 (a)) から再度図を取り直し, 回転をかけ, 流出方向に若干領域を伸ばした画像を採用した (Fig. 13). 今回使用した画像データのサイズは 300×150 ピクセルである. また, Olufsen らの論文 [14] の値を参考にして, 流入部における血管の幅および最大流量をそれぞれ $D = 0.8 \text{ cm}$, $Q_p = 30 \text{ cm}^3/\text{s}$ とし, 1周期あたりの拍動時間を $T \doteq 1.1 \text{ s}$, 粘性係数を $\mu = 0.049 \text{ g}/(\text{cm} \cdot \text{s})$, 密度を $\rho = 1.055 \text{ g}/\text{cm}^3$ とする. このとき, $Re \doteq 646$, $St \doteq 0.019$ となる. さらに, 無次元化して計算を行ったときの時間ステップ幅は $\Delta t = 1/3000 \doteq 0.333 \times 10^{-3}$, メッシュの幅の長さは $h = k = 1/29 \doteq 0.345 \times 10^{-1}$

とした。速度の境界条件は、血管壁は no-slip 条件、流入部は Olufsen らの頸動脈部の流入量 (Fig. 14) を参考にして無次元化した速度を与え、流出部は $\partial u/\partial x = 0$, $\partial v/\partial x = 0$ にて与えた。圧力は第4節に準じて与えた。計算結果は Fig. 15 から Fig. 18 にて示す。なお、無次元時間では $t \doteq 0.13$ のときに流入速度は最大となる。



Fig. 13: Pixel data used by the calculation

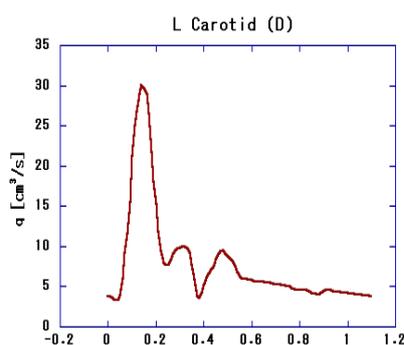


Fig. 14: Flowform in carotide artery by Olufsen (2000)

Fig. 15 および Fig. 16 から分かるように、速度のピーク直後には分岐部に非常に大きな圧力がかかっていることが読み取れる。また、狭窄部では速度が速くなっており、圧力の変化も大きいことが分かる。また、無次元時間 $t = 0.15$ から $t = 0.2$ では、分岐した2つの血管に同程度の速度分布が見られ、狭窄部側にもかなり流れこんでいることが分かる。さらに、Fig. 17 および Fig. 18 の流線図を見ると、大きく曲がっている部分では、時間によって剥離が生じていることが読み取れる。特に、無次元時間 $t = 0.2$ において狭窄部のすぐ後ろおよび大きく曲がっている部分で剥離の状態が強く現れていることが分かる。また、狭窄部のすぐ後ろの部分では、速度のピークを過ぎてからでも剥離の状態がしばらく続いていることが読み取れる。

7. 振動壁を伴う血管に対する応用

ここでは、Fig. 19 のような、振動壁を伴う血管の例を取り扱うこととする (Ralph [15], Liu et al. [16])。ただし、上壁は以下の関数で定義するものとする。

$$H(x, t) = 1 - G(x)T(t)$$

ここで、 $G(x)$ は第5節で定義された関数であり、 $T(t) = 0.5(1 - \cos 2\pi t)$ と定義する。

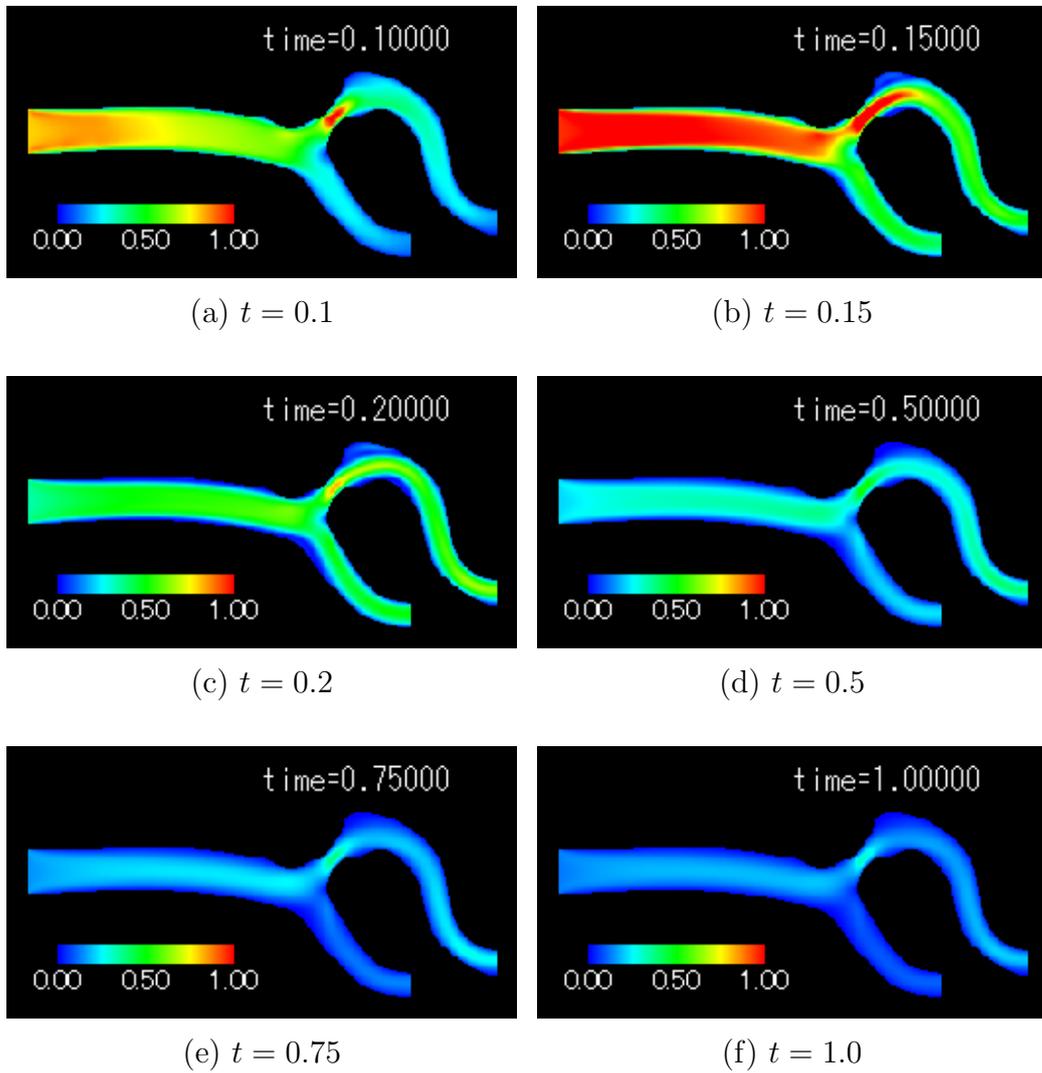


Fig. 15: Iso-velocity contours

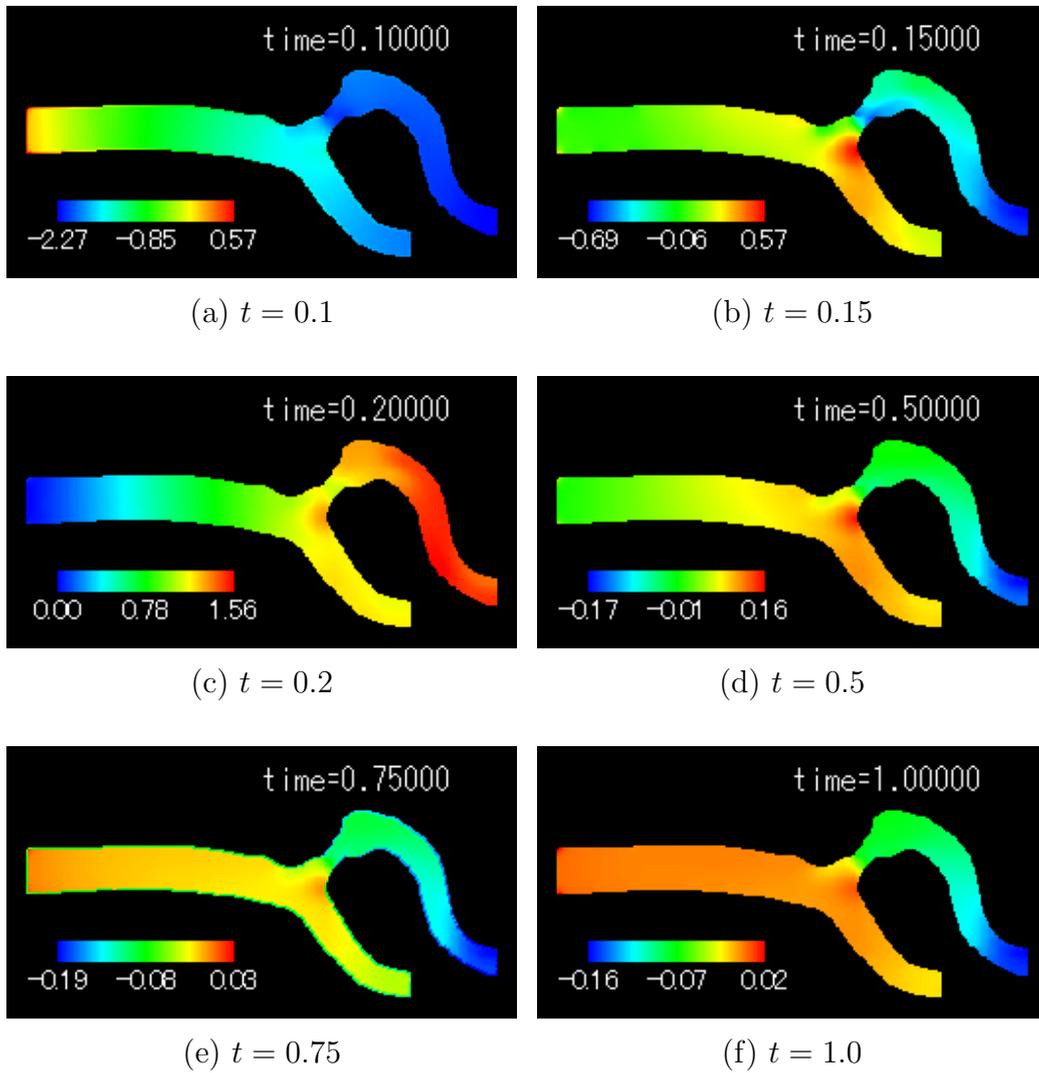


Fig. 16: Pressure contours

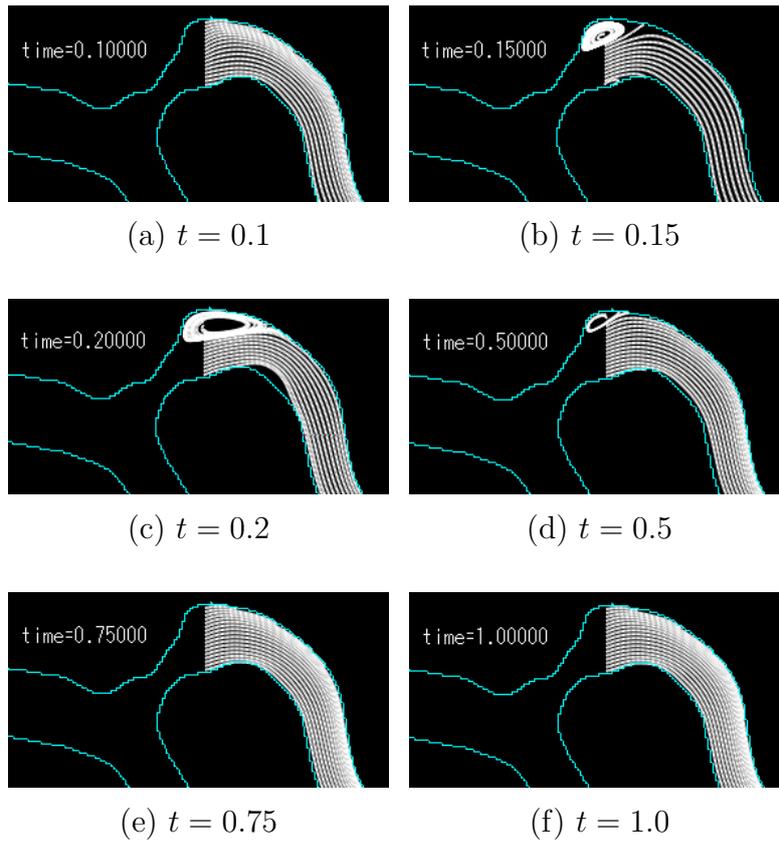


Fig. 17: Streamlines (1)

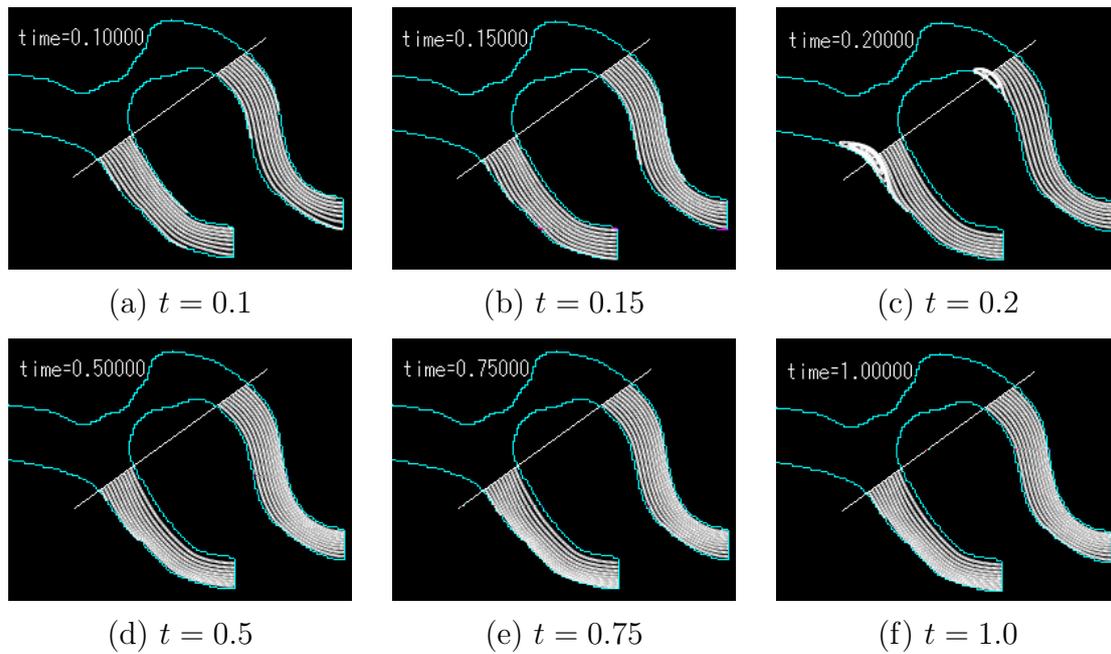


Fig. 18: Streamlines (2)

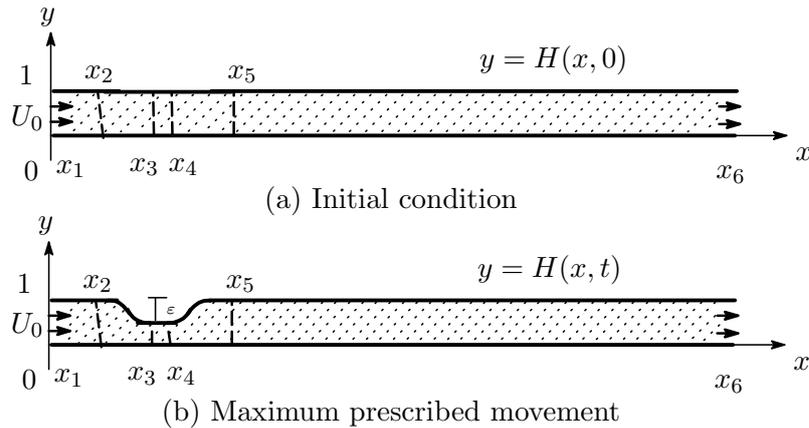


Fig. 19: Computational stenosis models

また，流入条件: U_0 はポアズイユ流れとし， $x_1 = 0.0$, $x_2 = 3.0$, $x_3 = 5.5$, $x_4 = 13.5$, $x_5 = 16.0$, $x_6 = 28.0$ とする．さらに，各ステップにおいてピクセルデータを計算し，そのデータを用いる．アルゴリズムに関しては，固定壁の時と同様のものを使用する．また，移動境界の近くの点に対しては，流速 (u^*, v^*) および圧力 p^n に関して補間が必要となることに注意する．境界条件としては，血管壁上部に関しては速度に対して no-slip 条件: $(u, v) = (0, St \cdot \partial H(x, t) / \partial t)$ を使い，流出部の速度の境界条件は $\partial u / \partial x = \partial v / \partial x = 0$ を用いた．また，初期条件として， $t = 0$ において $(u, v) = (U_0, 0)$ とした．

Fig. 20 と Fig. 21 は， $Re = 300$, $St = 0.057$, $\varepsilon = 0.4$ (Liu et al. [16]) に対して数値計算を行った図を表す．メッシュ幅と時間ステップ幅はそれぞれ $h = k = 0.05$, $\Delta t = 0.0002$ とし，計算は1周期 (5000 ステップ) 行っている．Fig. 20 と Fig. 21 から分かるように，我々の方法を用いて直交座標系にて計算を行っても，振動壁を有する場合においても適用可能であることが示される．

8. 結言

2次元の直交座標系を用いて，狭窄部における拍動流を伴う場合の数値計算および，その応用として実際の医用画像から得た頸動脈における血流解析を行ったが，いずれの場合も我々の方法が適用可能であることを示すことができた．また，さらに別の応用として，振動壁を有する場合の血管内の流れの数値計算を行ったが，こちらの場合も我々の方法が適用できることを示すことができた．

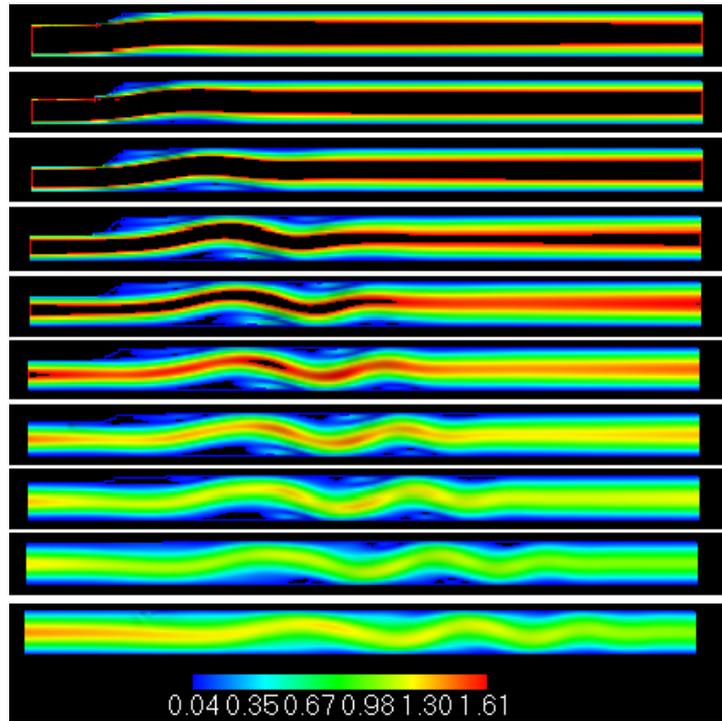
しかしながら，特に振動壁を有する場合，実際の画像データを元にして計算するにはまだまだいろいろな問題点がある．例えば，通常の動画データは30枚/秒であるから，1周期 (例えば1.1秒/拍) の計算データに使用する時間ステップにおけるデータが不足するため，フレーム間に何らかの補間が必要になる．また，移動境界部分は，今回のように一部だけではなく全体で動くことも予想され，全体で動いた場合，直交座標系において境界部分の取り扱いについてさらに考察しなければならないであろう．また，境界条件も複雑になるため，直交座標系においての計算で，どのようにその部分を離散化するかという問題が残る．さらに，実際の血管では流量を調整しようと働く圧力の変化があるため，血流解析を行う場合，流出条件に関して検討の余地があると思われる．また，NPLC法に

より境界の周りでは2次関数で近似を行っているが、それをさらに高次関数で近似ができれば、より境界の近くでの計算式の精度が上がり計算結果も良くなると考えられる。さらに、3次元化となると、境界部分の処理が増えるため現プログラムを更に改良する必要がある、これらは今後の課題である。

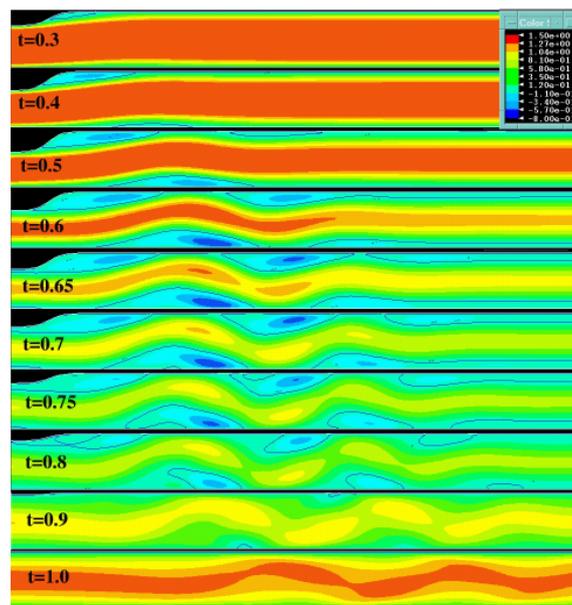
参考文献

- [1] 松永奈美・劉浩・姫野龍太郎, “ボクセル情報を用いた直交座標系における2次元血管内の流れの数値シミュレーション”, 第15回数値力学シンポジウム講演要旨集(2001), p174.
- [2] 松永奈美・劉浩・姫野龍太郎, “医療画像データを用いた直交座標系における血流解析”, 第16回数値力学シンポジウム講演要旨集(2002), p106.
- [3] N. Matsunaga, H. Liu and R. Himeno, “Numerical analysis of two-dimensional incompressible viscous flow in orthogonal coordinates”, INFORMATION, Vol.5, No.3(2002), pp.319-326.
- [4] N. Matsunaga, H. Liu and R. Himeno, “An image-based computational fluid dynamic method for haemodynamic simulation”, JSME International Journal, Series C, Vol.45, No.4(2002), pp.989-996.
- [5] 松永奈美・劉浩・姫野龍太郎, “直交格子系における血流解析”, 理研シンポジウム「生体力学シミュレーション研究」予稿集(2001), pp.135-141.
- [6] N. Matsunaga, H. Liu and R. Himeno, “Blood flow analysis using voxel information”, Proceedings of Riken Symposium(2002), pp.213-227.
- [7] 松永奈美・劉浩・姫野龍太郎, “直交座標系における血流解析”, 理研シンポジウム「生体力学シミュレーション研究」予稿集(2003), pp.8-22.
- [8] C. W. Hirt and B. D. Nichols, “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, J. Comp. Phys., **39**(1981), pp.201-225.
- [9] 西田秀利, “非スタガード差分法による非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の数値解”, 日本機械学会論文集(B編), 62巻599号(1996), pp.2646-2651.
- [10] 中野明・下村信雄・里深信行, “デカルト格子系による任意形状物体周りの圧縮性粘性流計算”, 日本機械学会論文集(B編), 61巻592号(1995), pp.4319-4326.
- [11] H. Liu and T. Yamaguchi, “Effects of Pulsation and Geometry on Post-Stenotic Oscillatory Flow”, JSME Int. J., Series C, **42**, No.3(1999), pp.612-620.
- [12] H. Liu and T. Yamaguchi, “Waveform Dependence of Pulsatile Flow in a Stenosed Channel”, ASME J. Biomech, Eng., **123**(2001), pp.88-96.

- [13] O. R. Tutty, Pulsatile flow in a constricted channel, *ASME J. Biomech. Eng.*, 114(1992), pp.50-54.
- [14] M. S. Olufsen, C. S. Peskin, W. Y. Kim, E. M. Pedersen, A. Nadim and J. Larsen, “Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions”, *Ann. Biomed. Eng.*, Vol.28(2000), pp.1281-1299.
- [15] M. E. Ralph, and T. J. Pedley, Flow in a channel with time-dependent indentation in one wall, *J. Fluid. Eng.*, 112 (1990), 468–475.
- [16] H. Liu, and T. Yamaguchi, Computational fluid mechanics of the vortical flow in blood vessel, in *Clinical Application of Computational Mechanics to the Cardiovascular System* (ed. by T. Yamaguchi), Springer-Verlag Tokyo (2000), 136–156.

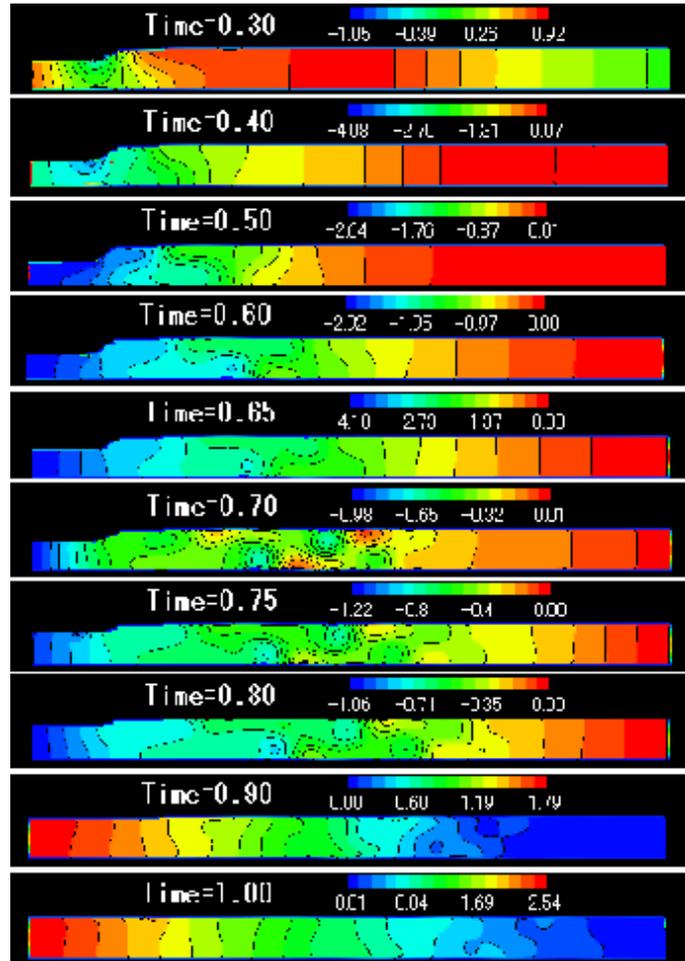


(a) Present work

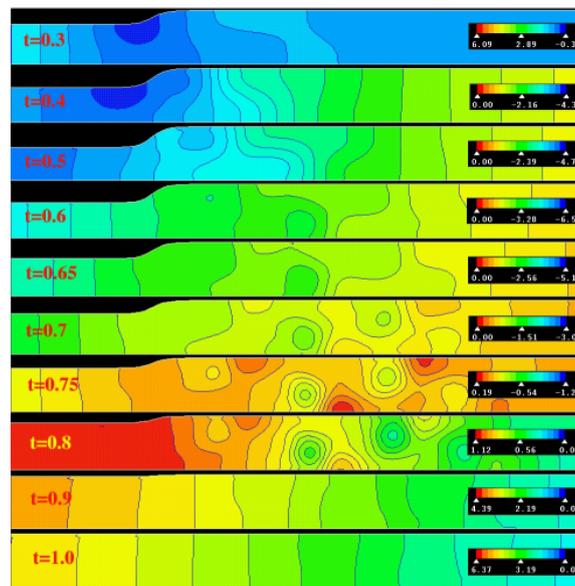


(b) Liu et al. (2000)

Fig. 20: Iso-velocity contours at $Re = 300$ and $St = 0.057$ with $\varepsilon = 0.4$



(a) Present work



(b) Liu et al. (2000)

Fig. 21: Pressure contours at $Re = 300$ and $St = 0.024$ with $\varepsilon = 0.4$